Vorkurs Mathematik

Vorbereitung auf das Studium der Mathematik

Skript

Dr. Johanna Dettweiler

Institut für Analysis

20. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **7**

1 Aussagen und Mengen **9**
1.1 Aussagen: Definition . . . 9
1.1.1 Beispiele für Aussagen . . . 9
1.1.2 keine Aussagen . . . 9
1.2 logische Verknüpfungen . . . 9
1.3 Mengen: Definition . . . 10
1.4 Darstellung von Mengen . . . 10
1.5 Teilmengen . . . 11
1.5.1 Beispiel . . . 11
1.5.2 Leere Menge . . . 11
1.6 Schnitt- und Vereinigungsmenge . . . 11
1.6.1 Beispiel . . . 12
1.7 Relatives Komplement . . . 12
1.7.1 Beispiel . . . 12
1.8 Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ . . . 12
1.8.1 Beispiel . . . 13
1.8.2 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen . . . 13
1.8.3 Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen . . . 14
1.8.4 Beispiele . . . 15
1.9 Intervalle . . . 15
1.9.1 Definition . . . 15
1.9.2 Beispiel . . . 16

2 Prädikatenlogik **17**
2.1 Die Quantoren . . . 17
2.1.1 Beispiel . . . 17
2.1.2 Beispiel . . . 17
2.1.3 Beispiel: Bedeutung der Reihenfolge der Quantoren . . . 18
2.2 Verneinung (Negation) von Aussagen . . . 18

3 Potenzen, Logarithmus und Betrag **19**
3.1 Potenzen . . . 19

3.1.1 Definition . . . 19
3.1.2 Die q-te Wurzel . . . 19
3.1.3 Potenzen mit rationalem Exponenten . . . 20
3.1.4 Beispiele . . . 20
3.1.5 Beispiel: Rationalmachen des Nenners . . . 20
3.2 Der Logarithmus . . . 21
3.2.1 Die Logarithmengesetze . . . 21
3.2.2 Umrechenformel . . . 21
3.2.3 Beispiele . . . 22
3.2.4 Beispiele zu den Logarithmengesetzen . . . 22
3.3 Der Betrag . . . 22
3.3.1 Beispiel . . . 22
3.3.2 Beispiel . . . 23
3.3.3 Auflösen von Betragsungleichungen . . . 23

4 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen **24**
4.1 in einer Variablen . . . 24
4.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen . . . 24
4.2.1 Beispiel: Quadratisches Ergänzen . . . 24
4.2.2 Lösungsmengen quadratischer Ungleichungen . . . 25
4.2.3 Beispiel 1 . . . 25
4.2.4 Beispiel 2 . . . 26
4.3 Wurzelgleichungen . . . 26
4.3.1 Beispiel 1 . . . 27
4.3.2 Beispiel 2 . . . 27
4.4 Bruchungleichungen . . . 27
4.5 Betragsungleichungen . . . 29
4.6 ...in zwei Variablen . . . 30
4.6.1 Kartesisches Produkt . . . 30
4.6.2 $\mathbb{R}^2$ . . . 30
4.6.3 Das kartesische Produkt zweier Intervalle . . . 30
4.6.4 Einige Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ . . . 31
4.6.5 Vertauschen von x und y . . . 31
4.6.6 Beispiel . . . 32

5 Funktionen **34**
5.1 Definition . . . 34
5.2 Der Graph einer Funktion . . . 34
5.3 Eigenschaften von Funktionen . . . 35
5.3.1 Monotonie . . . 35
5.3.2 gerade und ungerade Funktionen . . . 35
5.4 Definition der Umkehrfunktion . . . 35

5.5 Die Potenzfunktion 36
5.5.1 Beispiel 37
5.6 Die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion 37
5.7 Polynome 38
5.7.1 Allgemeine lineare Funktionen 39
5.7.2 Beispiele 39
5.8 Verkettung von Funktionen 42
5.8.1 Beispiel 42
5.8.2 Beispiele 44

6 Trigonometrische Funktionen **46**
6.1 Herleitung und Definition 46
6.1.1 Schaubild des Sinus und Cosinus 47
6.1.2 Umrechnung von Grad- und Bogenmaß 47
6.1.3 Schaubild des Tangens und Cotangens 48
6.1.4 Spezielle Werte 48
6.1.5 Die Additionstheoreme 49
6.1.6 Beispiel 49

7 Einige Beweise **50**

8 Anhang **53**
Lösungen zu den Beispielen des Skriptes 53

Index **64**

Einleitung

Dieser Kurs soll wichtige Bereiche Ihres Schulwissens möglichst konsistent aufbereiten. Er richtet sich insbesondere an Studierende, die Unsicherheiten im Umgang mit dem mathematischen Schulstoff haben, deren Mathematikunterricht länger zurückliegt oder deren mathematischer Schulstoff nicht alle für das Studium notwendige Voraussetzungen umfasste. Der Vorkurs muss sich auf das Notwendigste beschränken, soll Sie aber schon vertraut machen mit der präzisen Darstellung mathematischer Sachverhalte, wie sie das Studium vermitteln und verlangen wird.

Die dargestellten Inhalte sind vielerorts, sei es frei erhältlich im Internet, oder auf dem Büchermarkt in guten Darstellungen zu finden. In diesen Kurs fließen aber die speziellen Erfahrungen des Lehrbetriebes an der Karlsruher mathematischen Fakultät ein. Über Jahre konnten wir gravierende Lücken vieler Studienanfänger im Umgang mit elementaren Rechentechniken und Definitionen, wie Rechnen mit Beträgen oder den sicheren Umgang mit Ungleichungen beobachten. Wenn solche Lücken nicht aufgearbeitet werden, kann daran leicht das erfolgreiche Studium scheitern. Auch beobachteten wir bei vielen Studienanfängern und -anfängerinnen große Hemmungen, sich eigenständig an das Lösen auch einfacherer Übungsaufgaben zu machen. Das ist aber unumgänglich um mit dem Fortschreiten des Stoffes Schritt zu halten und nicht irgendwann „abzuhängen“. Dieser Vorkurs soll daher jedem Studienanfänger, jeder Studienanfängerin die Chance bieten, im Studium von Anfang an alle Übungsangebote optimal für sich nutzen zu können und damit die Grundlage für ein erfolgreiches Mathematik- oder Informatikstudium an der Universität Karlsruhe bieten.

Auf dem Büchermarkt gibt es eine große Anzahl von mathematischen Einführungen und Vorkursen. Das folgende Material wurde von einigen davon inspiriert.

[2]: Dieses Buch bietet eine sehr ausführliche Einführung in alle Grundlagen und Begriffe, die für ein Studium der Mathematik oder Wirtschaftswissenschaften benötigt werden. Da es sich an Studierende der Wirtschaftwissenschaften und Sozialwissenschaften richtet, ist es für mathematisch interessierte Studienanfänger im Bereich Mathematik und Informatik bestimmt etwas zu ausführlich. Einige der Beispiele des vorliegenden Vorkursskripts zu quadratischen Gleichungen und Ungleichungen wurden ihm entnommen.

[3]: Dieses Werk bietet eine knappe aber konsistente Einführung in die Bereiche Mengen, Abbildungen, Rechenregeln für reelle Zahlen, Betrag, Intervalle, Summenzeichen. Die

Darstellung der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wird in diesem Buch sinngemäß übernommen, wie auch einige Aufgaben.

[4]: Dieses Büchlein wird inzwischen leider nicht mehr aufgelegt. Gut verständliche Einführungen, sinnvoller Aufbau und eine große Zahl von Aufgaben mit Lösungen machen ein Selbststudium gut möglich. Einige Beispiele in den Kapiteln 3, 4 und 5 sind ihm entnommen. Zu bemerken wäre allenfalls, dass die Autoren gemäß ihrer Lehrtradition in ihrer Darstellung der Funktionen nicht zwischen einer Funktion f und dem Funktionswert an einer Stelle $f(x)$ unterscheiden. Da diese Unterscheidung im Studium in vielen Vorlesungen aber getan wird, wird auch in diesem Vorkurs streng zwischen Funktion und Funktionswerten unterschieden.

[1]: Diesem Buch, das auf anspruchsvolle Weise den Analysis-Stoff des Grundstudiums behandelt, habe ich sinngemäß das Kapitel 2 dieses Vorkurses (dort S. 4 ff) über Prädikatenlogik und die Verwendung der Quantoren entlehnt. Die vielen Beispiele helfen, abstrakte mathematische Definitionen, wie sie gleich zu Beginn des Studiums behandelt werden, zu verstehen. Die oft verwendete Technik des Verneinens von verknüpften Aussagen wird anhand vieler Beispiele geübt.

1 Aussagen und Mengen

Wenn man sich über Mathematik verständigen will, ist es unumgänglich zu verstehen, was eine mathematische Aussage ist und wie sie verknüpft werden kann. Erst dann kann man verstehen, was bspw. ein mathematischer Beweis ist. Daher fängt dieser Vorkurs mit mathematischen Aussagen an und behandelt in Kürze, wie daraus durch verschiedene Verknüpfungen neue Aussagen entstehen.

1.1 Aussagen: Definition

Eine *Aussage* im mathematischen Sinne ist eine Feststellung, deren Wahrheitsgehalt stets mit „wahr“ oder „falsch“ angegeben werden kann.

1.1.1 Beispiele für Aussagen

- Dienstag ist ein Wochentag.
- Dienstag ist Montag.
- 2 ist eine gerade Zahl.
- $2 = 1$

1.1.2 keine Aussagen

- Mathematik macht Spaß.
- $2 \cdot \log x \frac{sin x}{\pi}$

1.2 logische Verknüpfungen

Folgende *logischen Verknüpfungen* von Aussagen werden wir verwenden:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung der Verknüpfung
1. Negation	$\neg\mathcal{A}$	nicht $\mathcal{A}$ (es gilt: $\neg(\neg\mathcal{A}) = \mathcal{A}$)
2. Konjunktion (und)	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
3. Disjunktion (oder)	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
4. Implikation (Folgerung)	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
5. Äquivalenz (genau dann, wenn; kurz: gdw)	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent

In **Kapitel 2** werden weitere Verknüpfungen von Aussagen erarbeitet werden.

1.3 Mengen: Definition

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Für jedes Objekt muss eindeutig feststellbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht. Die zu einer Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Mengen werden im Allgemeinen mit Großbuchstaben $A, B, C, ...$ und ihre Elemente mit kleinen Buchstaben $a, b, c, ...$ bezeichnet.

Wir schreiben
$a \in A$ für „a ist Element von A" und
$a \notin A$ für „a ist kein Element von A".

1.4 Darstellung von Mengen

Elemente von Mengen werden durch geschweifte Klammern $\{...\}$ zusammengefasst.

Dies geschieht

entweder durch die *aufzählende Darstellung*, wie:
die Menge A der Buchstaben des Namens „Leonhard Euler", mit Unterscheidung großer und kleiner Buchstaben:
$A = \{L, e, o, n, h, a, r, d, E, u, l\} = \{r, e, l, n, h, a, L, d, E, u, o\}$,

oder durch die *beschreibende Darstellung* $\{x|x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$, wie:
$B := \{x|x \in A, x \text{ ist ein Großbuchstabe }\} = \{L, E\}$ oder
$C := \{x|x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$.

Es bedeutet $X := Y$ „X sei definiert als Y“.

Ist für ein x aus einer Menge X die Eigenschaft E in Gestalt eines Ausdruckes $E(x)$ gegeben, so sind gleichbedeutend $\{x \in X|\, x$ hat die Eigenschaft $E\}$, $\{x \in X|\, E(x)$ ist wahr.$\}$ oder meist $\{x \in X|\, E(x)\}$. Die so definierte Menge ist dann eine Teilmenge von X (s.u.).

1.5 Teilmengen

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element a aus A auch Element von B ist.

Wir schreiben $A \subset B$.

Falls A keine Teilmenge von B ist, so schreiben wir $A \not\subset B$.

Gilt $A \subset B$ und $B \subset A$, so sind die Mengen gleich und wir schreiben $A = B$.

1.5.1 Beispiel

Mit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 2, 1\}$, $D = \{2, 4\}$ gilt:

$A \subset B, A \subset C, C \subset A, A = C$ und $A \not\subset D$.

Insbesondere ist jede Menge Teilmenge von sich selbst: $A \subset A$.

Ist $A \subset B$, so nennt man B auch *Obermenge* von A.

1.5.2 Leere Menge

Die Menge, die kein Element besitzt, wird als *leere Menge* bezeichnet. Wir schreiben $\emptyset$ oder $\{\}$.

Nicht zu verwechseln mit $\{\emptyset\}$ oder $\{0\}$.

1.6 Schnitt- und Vereinigungsmenge

Seien A, B Mengen.

Die *Schnittmenge* $A \cap B$ von A und B wird definiert als

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ von A und B wird definiert als

$$A \cup B := \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

1.6.1 Beispiel

Mit $A := \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ ist $A \cap B = \{3\}$ und $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.7 Relatives Komplement

Seine A, B Mengen. Als *relatives Komplement von B in A* definiert man die Menge $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$.

1.7.1 Beispiel

$\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\}$

1.8 Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

In der Menge $\mathbb{N}$ der *natürlichen Zahlen*, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, hat jede Zahl n einen Nachfolger $n + 1$; es gibt also keine größte natürliche Zahl. In $\mathbb{N}$ sind die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ uneingeschränkt ausführbar, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a + b, a \cdot b \in \mathbb{N}$. Die Differenz $a - b$ ist nur Element von $\mathbb{N}$, falls a echt größer als b ist.

In der Zahlenmenge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ist die Differenzbildung $a - b$ immer möglich; die Gleichung $x + b = a$ ($a, b \in \mathbb{N}$, x unbekannt, a, b bekannt) besitzt in $\mathbb{Z}$ stets eine Lösung. Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ keine kleinste Zahl. Der Quotient $a : b$ (oder $\frac{a}{b}$), $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ ist nicht immer in $\mathbb{Z}$ enthalten.

In der Zahlenmenge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\right\}$$

ist die Quotientenbildung $a : b$ für $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ immer möglich. Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Eine beliebige rationale Zahl hat keinen unmittelbaren Nachfolger und keinen unmittelbaren Vorgänger, wie es in $\mathbb{Z}$ der Falle ist. Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen stets noch (unendlich viele) andere rationale Zahlen.

Die Zahl $\sqrt{2}$, für die gilt

$$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2,$$

ist nicht rational; $\sqrt{2}$ ist *irrational*.

Beweis. Siehe Kapitel 7. □

Jede rationale Zahl läßt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede endliche oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar. In diesem Kontext soll es genügen, sich unter der Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* alle möglichen Dezimalzahlen vorzustellen, also endliche, periodische und nicht endliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.8.1 Beispiel

$1 \in \mathbb{N}$
$1,17 \in \mathbb{Q}$
$\frac{1}{3} = 0.3333... \in \mathbb{Q}$ ist periodisch, nicht endlich
$\sqrt{2} = 1,41421... \in \mathbb{R}$ ist nicht periodisch, nicht endlich
$\pi = 3.14159... \in \mathbb{R}$ ist nicht periodisch, nicht endlich. Mit der Zahl π identifizieren wir die Länge eines Halbkreisbogens mit dem Radius 1.

1.8.2 Rechenregeln für reelle Zahlen und Ordnungsrelationen

Wir vereinbaren für $x, y \in \mathbb{R}$:

$x = y$ steht für „x ist gleich y“,

$x < y$ steht für „x ist echt kleiner als y“,

$x \leq y$ steht für „x ist kleiner oder gleich y“,

$x > y$ steht für „x ist echt größer als y“,

$x \geq y$ steht für „x ist größer oder gleich y“.

Die reellen Zahlen können auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt. Für zwei beliebige reelle Zahlen x, y kann eindeutig entschieden werden, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ gilt. Auf der Menge der reellen Zahlen ist also ein Ordnungsstruktur gegeben. Für diese gelten folgende

1.8.3 Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen

Seinen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$

Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

$ab > 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)

$ab < 0$ gilt genau dann, wenn ($a > 0$ und $b < 0$) oder ($a < 0$ und $b > 0$)

$ab = 0$ gilt genau dann, wenn ($a = 0$ oder $b = 0$)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $\leq$ und $\geq$.

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen gelten folgende

Rechenregeln

Kommutativgesetz der	Addition	$a + b = b + a$
	Multiplikation	$ab = ba$
Assoziativgesetz der	Addition	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Multiplikation	$(ab)c = a(bc)$
Distributivgesetz		$a(b + c) = ab + ac$
1. binomische Formel		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel		$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel		$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Vorzeichenregeln		$-(-a) = a$
		$-(a + b) = -a - b$
		$-(a - b) = -a + b$

Die Regeln der Bruchrechnung werden als bekannt vorausgesetzt.

1.8.4 Beispiele

1. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} |$ Ungleichung bzw. Gleichung ist für x definiert und x erfüllt sie$\}$ an:
   $x - 2 > 2x - 1$ ▷
   $2(x - 1) < 6(x + \frac{5}{3})$ ▷
2. Faktorisieren Sie:
   $9xy + 3y + 6x + 2$ ▷
   $2p^3 + 9q^2 - 3p^2q - 6pq$ ▷
3. Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:
   $c^2 - 1$ ▷
   $y^2 - 12y + 36$ ▷
   $16x^4 - 8x^2y^2 + y^4$ ▷
4. Faktorisieren Sie (Nullstellen!):
   $x^2 + 3x + 2$ ▷
   $x^2 + x - 2$ ▷

1.9 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

1.9.1 Definition

Das *offene Intervall* (a, b) ist die Menge

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Das *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ ist die Menge

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Die *halboffenen Intervalle* sind definiert als die Mengen

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

Ist speziell $a = b$, so gelten $[a, a] = \{a\}$, bzw. $[a, a) = (a, a] = (a, a) = \emptyset$. Als Intervallgrenzen sind auch $\pm\infty$ zugelassen. Daraus ergeben sich fünf weitere unbeschränkte Intervalltypen:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\} \qquad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\} \qquad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Der Schnitt zweier Intervalle ist stets ein Intervall (evtl. die leere Menge). Die Vereinigung zweier Intervalle kann ein Intervall sein, muss es aber nicht.

1.9.2 Beispiel

$[3,4] \cap [1,\infty)$=[3,4]
$[-2,0) \cap (-1,0] = (-1,0)$
$[4,7] \cap [8,9) = \emptyset$
$[7,8] \cap [8,9) = [8,8] = \{8\}$
$[4,5) \cup (-3,1]$ ist kein Intervall
$[4,5] \cup (-3,4) = (-3,5]$

2 Prädikatenlogik

2.1 Die Quantoren

Die Quantoren $\exists$ und $\forall$ sind logische Zeichen, die der abkürzenden Schreibweise in der Aussagenlogik dienen.

Sei X eine Menge und E eine Eigenschaft, durch die für jedes $x \in X$ eine Aussage $E(x)$ gegeben ist. Dann bedeuten:

$$\begin{aligned} \big(\exists x \in X : E(x)\big): &\quad \text{„Es existiert ein } x \in X\text{, sodass } E(x) \text{ wahr ist.“} \qquad (2.1)\\ \text{bzw.} &\quad \text{„Es existiert ein } x \text{ mit der Eigenschaft } E\text{.“}\\ \big(\forall x \in X : E(x)\big): &\quad \text{„Für alle } x \in X \text{ gilt } E(x)\text{.“} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

2.1.1 Beispiel

Sei X die Menge der Teilnehmer dieses Vorkurses und $E(x)$ die Aussage: „x trägt eine Brille.“

1. Dann bedeutet (2.1): „Mindestens ein Teilnehmer trägt eine Brille.“ In welchen Konstellationen ist diese Aussage wahr bzw. falsch? ▷
2. (2.2) bedeutet: „Alle Teilnehmer tragen eine Brille.“

Diese Quantoren kann man auch iterativ verwenden: Seien X, Y Mengen und $X \times Y := \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$ das sog. *kartesische Produkt* od. auch *Kreuzprodukt von X und Y* und E eine Eigenschaft auf $X \times Y$.

Dann bedeutet bspw.

$$\exists x \in X : (\forall y \in Y : E(x, y)) :\text{„Es existiert ein } x \in X\text{, sodass für alle } y \in Y \text{ die Aussage } E(x, y) \text{ gilt.“} \qquad (2.3)$$

2.1.2 Beispiel

Sei $X = Y = \mathbb{R}$. $F(x, y)$ sei die Aussage $x \cdot y = 0$. Dann bedeutet (2.3): „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, sodass für alle $y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y = 0$ gilt.“

Ist diese Aussage wahr? Wenn ja, für welche x? ▷

2.1.3 Beispiel: Bedeutung der Reihenfolge der Quantoren

Die Reihenfolge der auftretenden Quantoren ist für die Bedeutung der formulierten Aussage entscheidend. Die Aussagen $\forall x\, \exists y : E(x,y)$ und $\exists y\, \forall x : E(x,y)$ haben eine unterschiedliche Bedeutung. So unterscheiden sich die Aussagen „Alle Anwesenden haben einen Schuh, der passt.“ und „Es gibt einen Schuh, der allen Anwesenden passt.“ oder auch die Aussagen $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\, \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$ und $\exists y \in \mathbb{Q}\, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} : x \cdot y = 1$.

2.2 Verneinung (Negation) von Aussagen

Oft gelingt es bei einfachen Aussagen, diese „nach Gefühl“ zu verneinen. Bei Aussagen, die selbst wieder Verknüpfungen anderer Aussagen sind, wird das jedoch immer unzuverlässiger. Es gibt aber eine ganz einfache Regel, wie das Negieren einer Aussage ganz „mechanisch“ zu bewerkstelligen ist:

- Behalte die Reihenfolge bei!
- Vertausche $\exists$ und $\forall$ sowie $\vee$ und $\wedge$.
- Verneine alle auftretenden Aussagen.

Die folgende Zusammenstellung listet Negierungen typischer Aussagetypen auf. Seien dabei A, B Aussagen, X, Y Mengen und E eine Eigenschaft.

1. $\neg\neg A := \neg(\neg A) = A$.
2. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
3. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.
4. $\neg(\forall x \in X : E(x)) = (\exists x \in X : \neg E(x))$. Die Negation der Aussage „Alle Teilnehmer waren pünktlich da“ ist die Aussage „Mindestens ein Teilnehmer war unpünktlich“.
5. $\neg(\exists x \in X : E(x)) = (\forall x \in X : \neg E(x))$. Die Negation der Aussage „Es gibt einen Teilnehmer mit Brille“ ist „Alle Teilnehmer tragen keine Brille“, was natürlich eher als „Kein Teilnehmer trägt eine Brille“ formuliert wird.
6. $\neg\big(\forall x \in X : (\exists y \in Y : E(x,y))\big) = \big(\exists x \in X : (\forall y \in Y : \neg E(x,y))\big)$. Die Negation der Aussage „Jeder Teilnehmer findet mindestens einen Satz des bisherigen Stoffes trivial“ ist die Aussage „Es gibt einen Teilnehmer der alle bisherigen Sätze nichttrivial findet“
7. $\neg\big(\exists x \in X : (\forall y \in Y : E(x,y))\big) = \big(\forall x \in X : (\exists y \in Y : \neg E(x,y))\big)$. Die Negation der Aussage „Es gibt einen Teilnehmer, der alle Anwesenden bereits kennt“ ist „Alle Teilnehmer kennen mindestens einen der Anwesenden nicht“.

3 Potenzen, Logarithmus und Betrag

3.1 Potenzen

3.1.1 Definition

Für Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ wird die m-te Potenz von a definiert als

$$a^m = 1, \qquad \text{falls } m = 0$$
$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-\text{mal}}, \qquad \text{falls } m > 0$$

bzw.

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}, \qquad \text{falls } m < 0, a \neq 0.$$

Die Zahl a heißt *Basis*, m heißt *Exponent*.

Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden *Potenzgesetze*:

1. $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$.
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

3.1.2 Die q-te Wurzel

Für $a \geq 0$ und $q \in \mathbb{N}$ ist $a^{\frac{1}{q}}$ die q-te *Wurzel* aus a,

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a};$$

das ist die Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, für die $x^q = a$ gilt. Für ungerade $m \in \mathbb{N}$ und $a < 0$ ist $x = -\sqrt[m]{-a}$ die Lösung der Gleichung $x^m = a$. Z.B. ist $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ die Lösung von $x^3 = -8$.

3.1.3 Potenzen mit rationalem Exponenten

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ definieren wir die *(gebrochene) Potenz* a^r durch

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Auch für rationale Exponenten gelten die obigen Potenzgesetze (m und n können durch $r, s \in \mathbb{Q}$ ersetzt werden). Der Anschauung halber formulieren wir hier einige mit der Wurzelschreibweise:

Seien $a \geq 0$ und $n, k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann gelten die sogenannten *Wurzelgesetze*

1. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

3.1.4 Beispiele

$\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{10} = 2$
$6 = \sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$
$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

3.1.5 Beispiel: Rationalmachen des Nenners

Treten Brüche mit irrationalen Nennern $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, so erweitert man den Bruch mit $a^{1-\frac{m}{n}}$.

So ist:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{1/3}} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Ist der Nenner der Gestalt $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ mit $a \neq b$, so wird der Bruch mit $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ erweitert.

So ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

3.2 Der Logarithmus

Unter dem Logarithmus c einer positiven reellen Zahl a zur positiven reellen Basis $b \neq 1$

$$c = \log_b a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

versteht man diejenige reelle Zahl c, mit der die Basis b zu potenzieren ist, um a zu erhalten. Es ist also die Gleichung

$$b^c = a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

mit der ersten Gleichung gleichwertig. Man schreibt auch $\log a$ anstelle $\log_b a$, falls man die Basis nicht festlegen will.

Eine besondere Rolle spielt die sog. *Eulersche Zahl* e. Für die Basis $e = 2,71828...$ verwenden man das Symbol

$$\ln a = \log_e a.$$

Es gilt insbesondere

$$a = b^{\log_b a} \text{ und } a^c = e^{c \ln a}.$$

Es gilt immer

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1.$$

3.2.1 Die Logarithmengesetze

1. $\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \quad x > 0, \quad y > 0;$
2. $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \quad x > 0, \quad y > 0;$
3. $\log(x^y) = y \cdot \log x, \quad x > 0;$
4. $\log \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \log x, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{N}.$

Wegen $\log_b a = \log_b \left(d^{\log_d a}\right) = (\log_d a)(\log_b d)$ gilt die

3.2.2 Umrechenformel

$$\log_d a = \frac{\log_b a}{\log_b d}, \quad a > 0$$

3.2.3 Beispiele

1. $2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$
2. $3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -2$
3. $\log_x 36 = 2 \Leftrightarrow x = 6$
4. $\log_x \frac{1}{64} = -6 \Leftrightarrow x = 2$
5. $\log_5 125 = x \Leftrightarrow x = 3$
6. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = x \Leftrightarrow x = 4$
7. $\log_3 x = 5 \Leftrightarrow x = 243$
8. $\log_2 x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{32}$

3.2.4 Beispiele zu den Logarithmengesetzen

1. $\log \dfrac{2\sqrt{a+b}a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$ $\triangleright$
2. $\log(a+b) + 2\log(a-b) - \dfrac{1}{2}\log(a^2-b^2)$ $\triangleright$

3.3 Der Betrag

Sei $a \in \mathbb{R}$; dann wird der *Betrag von* a, $|a|$, definiert als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

3.3.1 Beispiel

$|-3| = -(-3) = 3,$ da $-3 < 0;$ $\quad |3| = 3,$ da $3 > 0;$ $\quad |0| = 0.$

Der Abstand zweier beliebiger Zahlen a, b kann mit Hilfe des Betrages als Betrag der Differenz $|a-b|$ definiert werden.

Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a| \geq 0; \ |a| = 0 \text{ gdw. } a = 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

3.3.2 Beispiel

Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die folgenden Aussagen zutreffen:

1. $a^2 = 4$
2. $a^2 > 3$ ▷

3.3.3 Auflösen von Betragsungleichungen

Sei $\varepsilon > 0$. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind.

1. $|x| \leq \varepsilon$
2. $|x - 2| < \varepsilon$ ▷

4 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

4.1 in einer Variablen

Unter der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ einer Gleichung bzw. Ungleichung in $x \in \mathbb{R}$ verstehen wir die Menge aller x, für die die Gleichung bzw. Ungleichung definiert ist. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ (siehe **Beispiel 1.8.4.1**) ist dann eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Oft ist offensichtlich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und braucht nicht angegeben zu werden. Für die Ungleichung $\frac{1}{x} > 1$ hingegen ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{L} = (0, 1)$. Auch gibt es weitere Möglichkeiten, die Definitionsmenge korrekt anzugeben (siehe Abschnitt Bruchungleichungen)!

4.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

4.2.1 Beispiel: Quadratisches Ergänzen

Das *quadratische Ergänzen* ist eine Technik zum Ermitteln von Nullstellen quadratischer Gleichungen. Zunächst werden die Terme in x^2 und x durch eine binomische Formel ausgedrückt: das geht immer! Dann ist i.A. ein Korrekturterm notwendig um den x-freien Teil des binomischen Terms zu neutralisieren.

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$.

$$x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

also gilt

$$\begin{aligned}
&x^2 - x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow &(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \\
\Leftrightarrow &x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \\
\Leftrightarrow &x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow &x = -2 \vee x = 3
\end{aligned}$$

4.2.2 Lösungsmengen quadratischer Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen können stets auf die Form

$$x^2 + px + q \substack{\geq \\ \leq} 0, \quad \text{bzw.} \; \substack{> \\ <}$$

für $p, q \in \mathbb{R}$ gebracht werden.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist entweder leer, ein Intervall, oder Vereinigung zweier Intervalle. Zunächst muss die Lösungsmenge der *quadratischen Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ bestimmt werden. Dies geschieht z.B. mit der oben ausgeführten Technik des quadratischen Ergänzens.

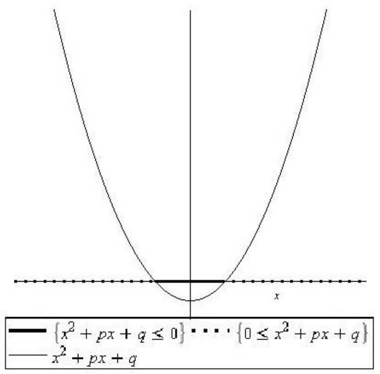


Bild 1

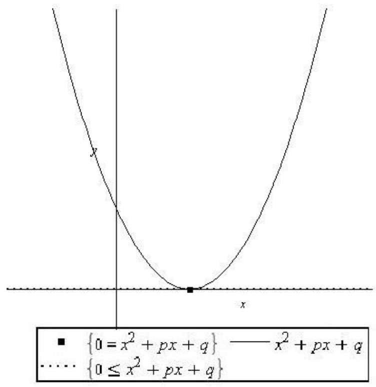


Bild 2

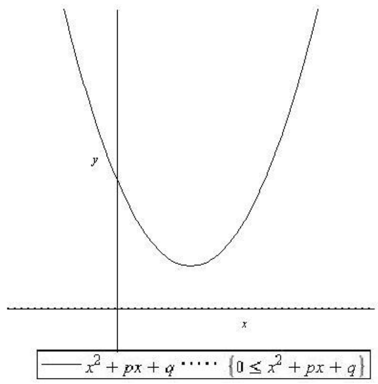


Bild 3

4.2.3 Beispiel 1

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x^2 - 2x + 3 > 0$ erfüllt ist.

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 - 1 + 3 = (x - 1)^2 + 2 > 0.$$

Da die letzte Ungleichung offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr ist, haben wir die Behauptung bewiesen.

4.2.4 Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - x - 6 > 0$.

1.Weg: über die Faktorisierung.

Aus 4.2.1 kennen wir die beiden Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ von $x^2 - x - 6$. Also gilt die Identität

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)\,.$$

Bekanntlich ist dieses Produkt genau dann größer Null, wenn ($x + 2 > 0$ und $x - 3 > 0$) oder ($x + 2 < 0$ und $x - 3 < 0$) erfüllt ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} & x+2>0 \quad \wedge \quad x-3>0 \\ \Leftrightarrow \quad & \quad x>-2 \quad \wedge \quad x>3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in (3, \infty) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & x+2<0 \quad \wedge \quad x-3<0 \\ \Leftrightarrow \quad & \quad x<-2 \quad \wedge \quad x<3 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in (-\infty, -2)\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also die Menge $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

2.Weg: über die Anschauung.

Wie in Bild 1 dargestellt, ist das Schaubild von x^2-x-6 eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse in den Punkten -2 und 3 schneidet. Gesucht ist nun die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an welchen die Parabel (echt) oberhalb der x-Achse liegt. Das entspricht in Bild 1 der gestrichelten Menge. Man sieht also $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

4.3 Wurzelgleichungen

Diese löst man durch wiederholtes Auflösen solcher Gleichungen nach einer Wurzel und anschließendem Potenzieren. Das führt auf eine rationale Gleichung in x, d.h. einer Gleichung in der nur noch ganzzahlige Exponenten von x auftauchen.

Achtung: Nicht alle Lösungen der resultierenden rationalen Gleichung sind Lösungen der Wurzelgleichung. Jedoch kann es außer den Lösungen der rationalen Gleichung keine weiteren geben. Durch Einsetzen dieser Lösungen in die Ursprungsgleichung erhält man die Lösungsmenge.

4.3.1 Beispiel 1

$$\begin{array}{lrl} & 7+3\sqrt{2x+4} & = 16 \quad (*) \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{2x+4} & = 9 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x+4} & = 3 \\ \Rightarrow & 2x+4 & = 9 \\ \Leftrightarrow & x & = \frac{5}{2} \end{array}$$

Einsetzen von $x = \frac{5}{2}$ zeigt: $x = \frac{5}{2}$ löst $(*)$. Damit ist $\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

4.3.2 Beispiel 2

$$\begin{array}{lrl} & \sqrt{x}-\sqrt{x-1} & = \sqrt{2x-1} \quad (**) \\ \Rightarrow & (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^2 & = 2x-1 \\ \Leftrightarrow & x-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+(x-1) & = 2x-1 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x(x-1)} & = 0 \\ \Leftrightarrow & (x=1)\vee(x=0) & \end{array}$$

Probe: $x = 1$: $1 - 0 = 1$ stimmt!

$x = 0$: die rechte Seite von $(**)$ ist für $x = 0$ nicht definiert.

Also ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

4.4 Bruchungleichungen

Zunächst bestimmt man $\mathbb{D}$, indem man alle x ausschließt, für die die auftretenden Nenner Null werden. Das Multiplizieren mit dem Nenner führt zu *Fallunterscheidungen*, abhängig vom Vorzeichen des Nenners.

Gesucht sei die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ folgender Ungleichung.

$$\frac{2x+1}{x-3} < 1 \tag{4.1}$$

Sei $x \neq 3$. Wir unterscheiden die Fälle:

Fall 1 $x-3>0$, also $x>3$: Dann gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{2x+1}{x-3} &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2x+1 &< x-3 \\ \Leftrightarrow \quad x &< -4 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Lösungsmenge in diesem Fall mit $\mathbb{L}_1$, so gilt $\mathbb{L}_1 = (3,\infty) \cap (-\infty,-4) = \emptyset$.

Fall 2 $x-3<0$, also $x<3$: Dann gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{2x+1}{x-3} &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2x+1 &> x-3 \\ \Leftrightarrow \quad x &> -4 \end{aligned}$$

Für die Lösungsmenge dieses Falles gilt $\mathbb{L}_2 = (-\infty,3) \cap (-4,\infty) = (-4,3)$

Für die Gesamtlösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt nun $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-4,3)$.

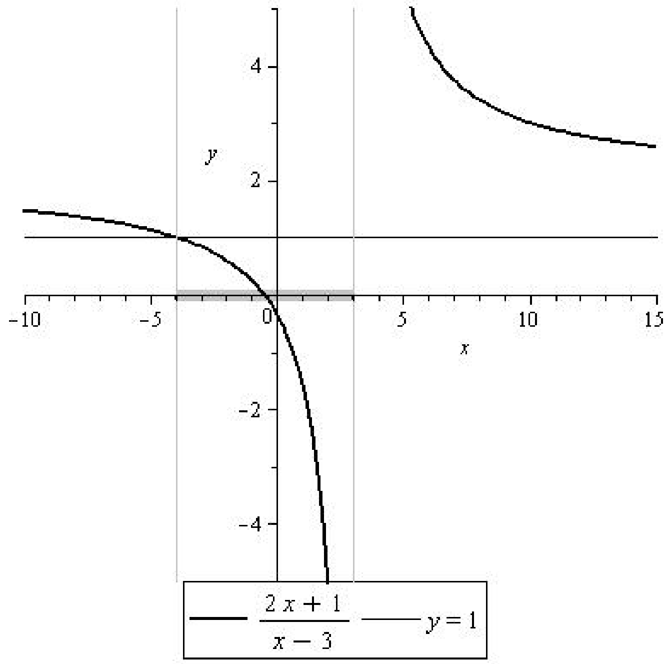


Bild 4.A

4.5 Betragsungleichungen

$$\frac{|2x+1|}{x-3} \leq 1 \qquad (*)$$

Bestimmen Sie $\mathbb{D}$ und $\mathbb{L}$.

Sei $x \neq 3$.

Fall 1: $x > 3$:

$$\begin{array}{rlcl} & & (*) & \\ \Leftrightarrow & |2x+1| & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & 2x+1 & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & -4 \end{array}$$

Analog zu 4.4 **Fall 1** ist hier $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.

Fall 2: $x < 3$:

$$\begin{array}{rlcll} & & (*) & & \\ \Leftrightarrow & |2x+1| & \geq & x-3 & \qquad (**) \end{array}$$

Fall 2a: $x \geq -1/2$ (also $2x+1 \geq 0$). Wir suchen jetzt also die $x \in [-1/2, 3)$, die $(**)$ erfüllen.

$$\begin{array}{rlcl} & & (**) & \\ \Leftrightarrow & 2x+1 & \geq & x-3 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & -4 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L}_{2a} = [-1/2, 3) \cap [-4, \infty) = [-1/2, 3)$.

Fall 2b: $x < -1/2$ (also $2x+1 < 0$).

$$\begin{array}{rlcl} & & (**) & \\ \Leftrightarrow & -(2x+1) & \geq & x-3 \\ \Leftrightarrow & -3x & \geq & -2 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2/3 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L}_{2b} = (-\infty, 3) \cap (-\infty, -1/2) \cap (-\infty, 2/3) = (-\infty, -1/2)$.

Insgesamt ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_{2a} \cup \mathbb{L}_{2b} = (-\infty, 3)$.

4.6 Gleichungen und Ungleichungen in zwei Variablen

4.6.1 Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen. Das *kartesische Produkt* auch *Kreuzprodukt* $A \times B$ der Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$

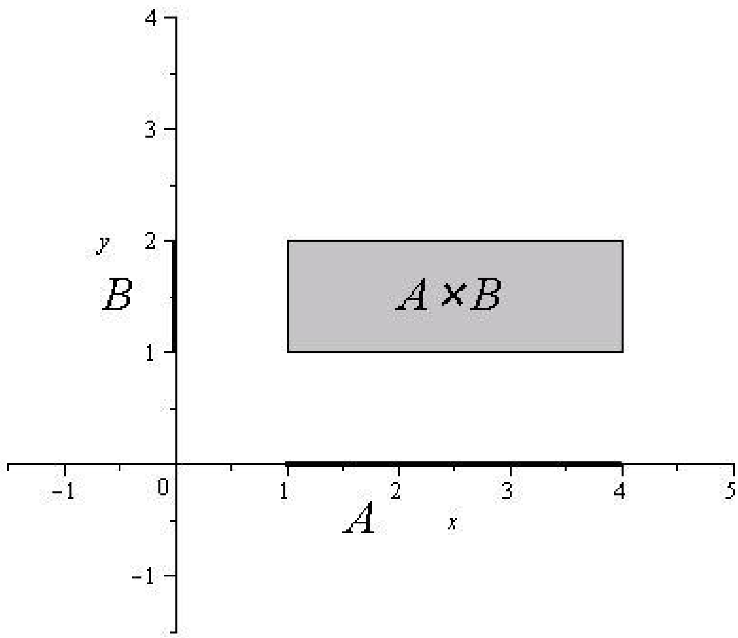
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

4.6.2 $\mathbb{R}^2$

Das kartesische Produkt $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) von Elementen $x, y \in \mathbb{R}$. Wir können uns $\mathbb{R}^2$ durch ein Koordinatensystem in der Ebene veranschaulichen.

4.6.3 Das kartesische Produkt zweier Intervalle

Das kartesische Produkt zweier Intervalle kann leicht im Koordinatensystem dargestellt werden:

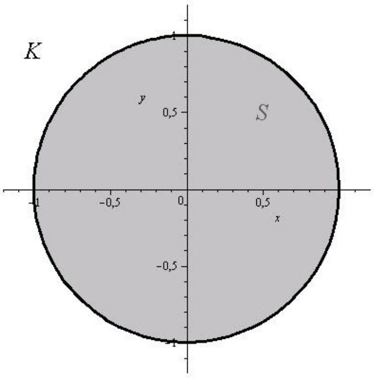


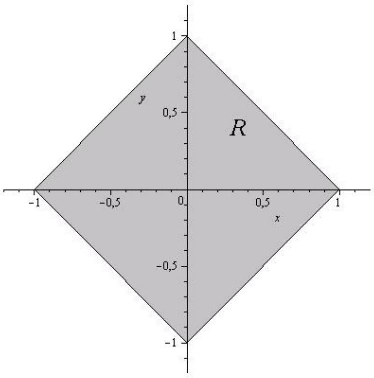
Das kartesische Produkt $A \times B$ der Intervalle $A = [1, 4]$ und $B = [1, 2]$ im Koordinatensystem.

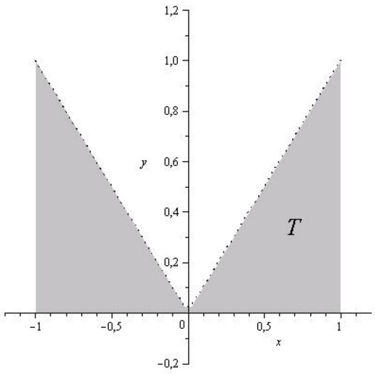
Andere Beispiele lassen sich nicht als kartesische Produkte darstellen:

4.6.4 Einige Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

1. $S := \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $K := \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$
3. $R := \{(x, y)||x| + |y| \leq 1\}$
4. $T := \{(x, y)|0 \leq y \leq 1, x^2 - y^2 > 0\}$







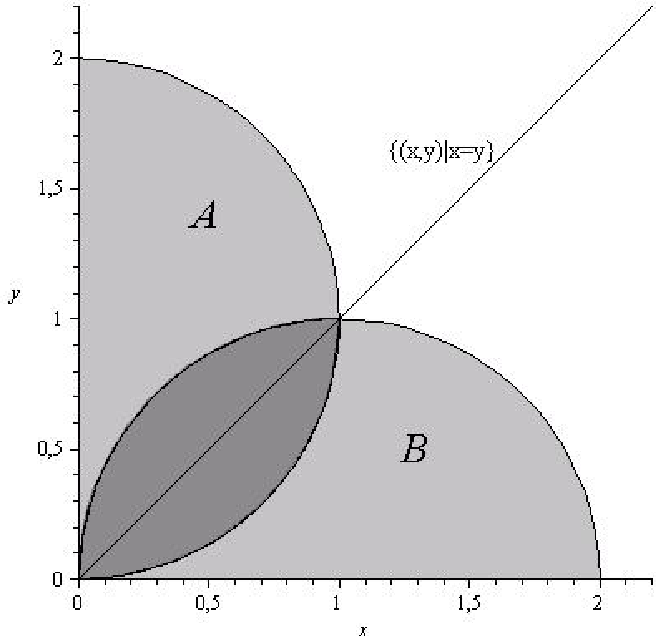
4.6.5 Vertauschen von x und y

Vergleichen Sie die beiden Mengen

$$A := \{(x, y)|(y - 1)^2 + x^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

und

$$B := \{(x, y)|(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$



B entsteht durch Spiegelung von A
an der Achse $x = y$.

4.6.6 Beispiel

Ermitteln Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in $\mathbb{R}^2$, deren Elemente die folgende Ungleichung erfüllen

$$2x - |y - 1| < 1$$

Hier lösen Sie wie gewohnt die Betragsstriche auf und lösen dann die Ungleichungen nach y auf:

Fall 1: $y \geq 1$, dh. $|y - 1| = y - 1$.

$$\begin{array}{rrcl} & 2x - |y-1| & < & 1 \\ \Leftrightarrow & 2x - (y-1) & < & 1 \\ \Leftrightarrow & -y & < & -2x \\ \Leftrightarrow & y > 2x & & \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L}_1 := \{(x, y)|y \geq 1, y > 2x\}$ Teilmenge von $\mathbb{L}$.

Fall 2: $y < 1$, dh. $|y-1| = 1-y$.

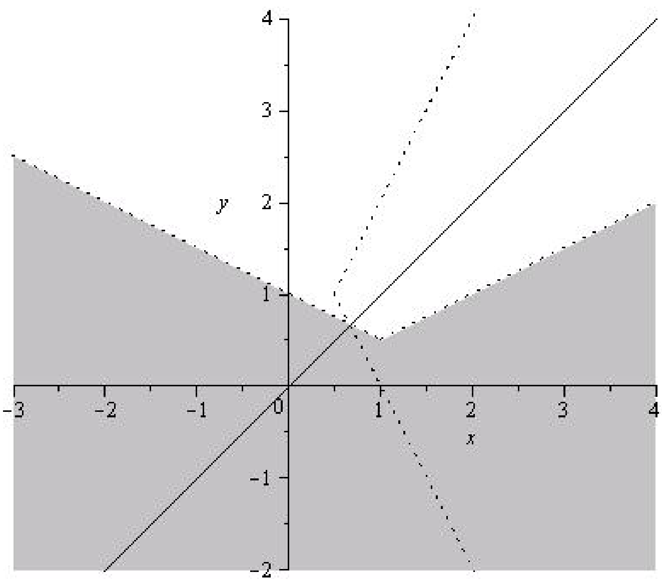
$$\begin{aligned} 2x - |y-1| &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2x - (1-y) &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad y < 2-2x & \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$ mit $\mathbb{L}_2 := \{(x,y) | y < 1, y < 2-2x\}$.

Skizzieren Sie die Lösungsmenge! $\triangleright$

Bemerkung: Bei diesem Beispiel könnte man auch obige Überlegung über das „Vertauschen" von x und y anwenden:

Es gilt (nachrechnen): $2x - |y-1| < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|y-1|$. Vertauschen wir hier x und y, so erhalten wir $y < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x-1|$. Die zugehörige Lösungsmenge lässt sich dann folgendermaßen skizzieren.



Spiegeln an der Geranden $x = y$ liefert dann die Skizze der ursprünglich gesuchten Menge.

5 Funktionen

5.1 Definition

Seien A, B Mengen. Eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element y, $y = f(x) \in B$ zuordnet, heißt *Funktion* oder auch *Abbildung* von A nach B.

A bezeichnen wir als *Definitionsbereich*, B als *Wertebereich*.

Schreibweisen: $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$. Oder: $f : A \to B$, $y = f(x)$.

5.2 Der Graph einer Funktion

Funktionen mit $A, B \subset \mathbb{R}$ lassen sich durch ihren *Graphen* veranschaulichen, welcher durch folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist:

$$G := \{(x, y) | y = f(x), x \in A\}$$

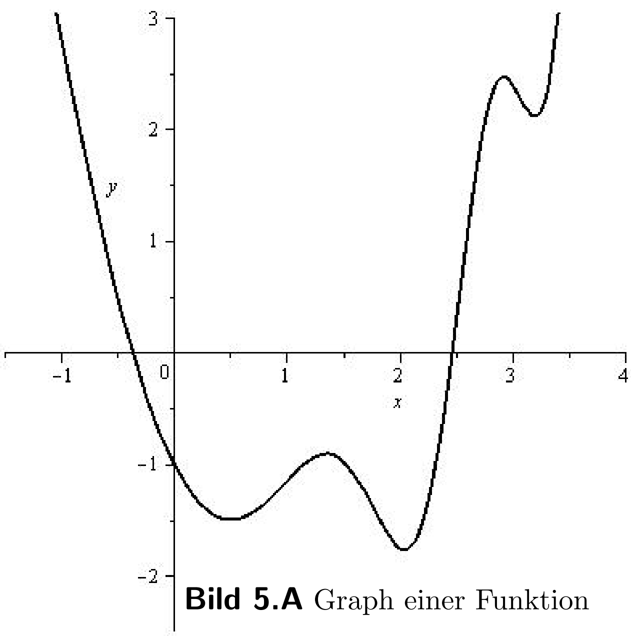


Bild 5.A Graph einer Funktion

5.3 Eigenschaften von Funktionen

Im Folgenden sei stets $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ und f eine Funktion mit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Eine solche Funktion nennt man auch *reellwertige (reelle) Funktion.*

5.3.1 Monotonie

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ heißt auf $\mathbb{D}$ *monoton wachsend (fallend)*, falls für alle Paare $x_1,\ x_2 \in \mathbb{D}$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$f(x_1) \leq f(x_2),\ \text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

Entfallen die Gleichheitszeichen, so spricht man von *strenger Monotonie*.

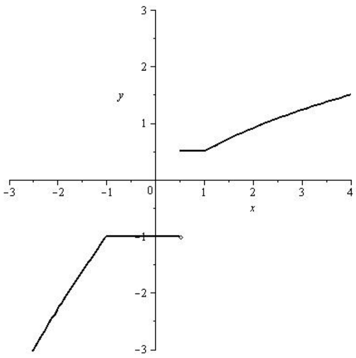


Bild 5.B monoton wachsende Funktion

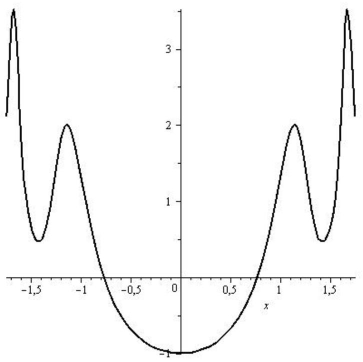


Bild 5.C gerade Funktion

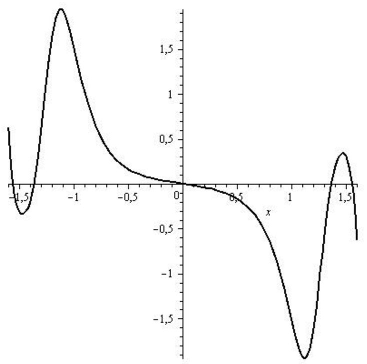


Bild 5.D ungerade Funktion

5.3.2 gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt *gerade* oder *symmetrisch*, bzw. *ungerade* oder *antisymmetrisch*, wenn gilt

$$f(-x) = f(x),\ \text{bzw. } f(-x) = -f(x)$$

5.4 Definition der Umkehrfunktion

Existiert zu jedem $y \in \mathbb{W} := \{y \in \mathbb{R} |\, \exists\, x \in \mathbb{D} : f(x) = y\}$ ($\mathbb{W}$ heißt *Wertemenge* oder *Bildmenge* oder *Bild*) genau ein x mit $y = f(x)$, so nennt man die Funktion *injektiv.* In diesem Falle ist x als eindeutige Funktion von y erklärt. Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{D}, \quad x = f^{-1}(y)$$

heißt *Umkehrfunktion* von f.

Es gilt also für alle $x \in \mathbb{D}$ und $y \in \mathbb{W}$: $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$.

Umkehrfunktionen existieren immer zu streng monotonen Funktionen. Die Graphen von f und f^{-1} liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Achtung: Die Bildmenge $\mathbb{W}$ ist i.A. eine echte Untermenge des Wertebereiches und besteht nur aus den tatsächlich angenommenen Werten. Zudem ist es manchmal sinnvoll den Definitions- bzw. Wertebereich einer Funktion f mit $\mathbb{D}_f$ bzw. $\mathbb{W}_f$ zu bezeichnen.

Im Folgenden wird eine Reihe von *elementaren Funktionen* mit ihren Graphen angegeben.

5.5 Die Potenzfunktion

Im Folgenden bezeichnen $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{<0}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Mengen $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Man nennt $\mathbb{R}_{>0}$ *die positiven Zahlen*, $\mathbb{R}_{<0}$ *die negativen Zahlen* und $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *die nicht negativen Zahlen.*

Eine Funktion $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^r, \quad a \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{Q}$$

heißt *Potenzfunktion*. Für $a \neq 0$ unterscheiden wir die Fälle

1. $r = 0$. f ist eine konstante Funktion mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $r = 1$. f ist eine lineare Funktion mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
3. $r \in \mathbb{N},\ r \geq 2$. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
4. $r \in \mathbb{Z},\ r \leq -1$. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $r \notin \mathbb{N},\ r > 0$. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
6. $r \notin \mathbb{Z},\ r < 0$. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_{>0}$

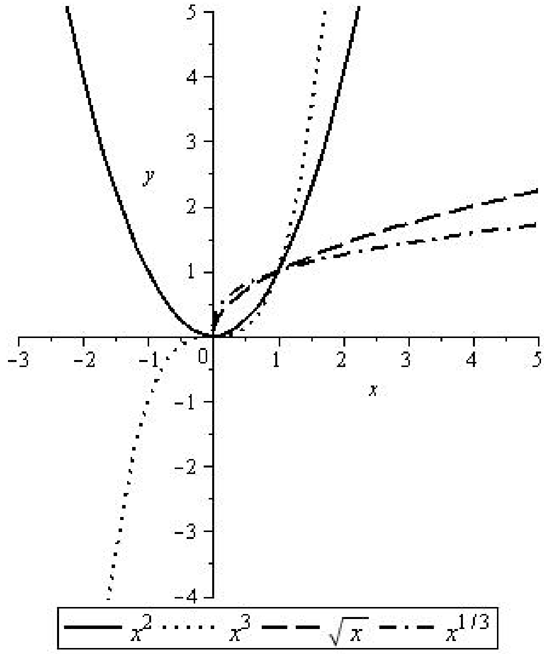


Bild 5.E

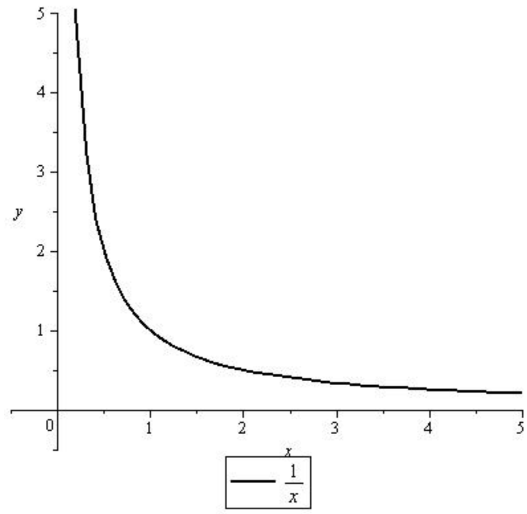


Bild 5.F

5.5.1 Beispiel

Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gegeben, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} durch

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \text{ mit } \mathbb{D}_{f^{-1}} = [0, \infty)$$

gegeben.

Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Achse $x = y$, wie man in **Bild 5.E** sehen kann.

5.6 Die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

nennt man *Exponentialfunktion*.

Die *Logarithmusfunktion* mit

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und auf $\mathbb{D} = (0, \infty)$ definiert (vgl. 3.2).

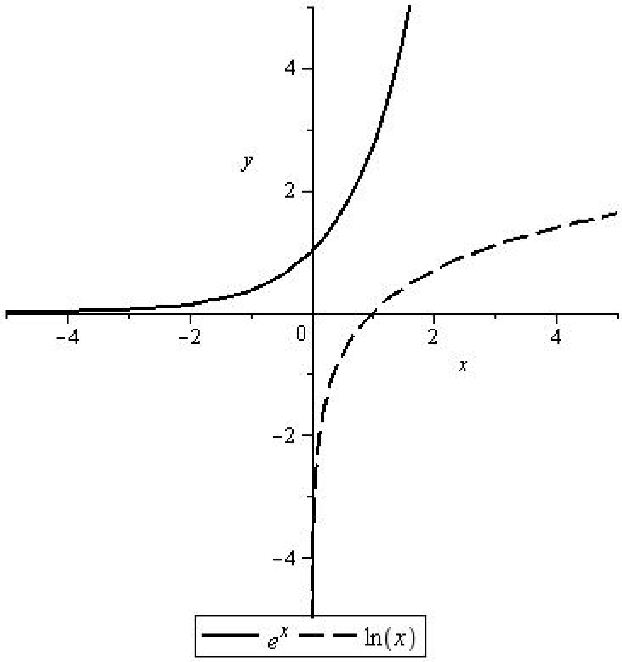


Bild 5.G

5.7 Polynome

Als Polynome bezeichnen wir bestimmte Summen von Potenzfunktionen.

Ein Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \quad a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

nennen wir ein *Polynom*. Ist $a_n \neq 0$, so ist p ein Polynom n-ten Grades und n heißt der *Grad* von p.

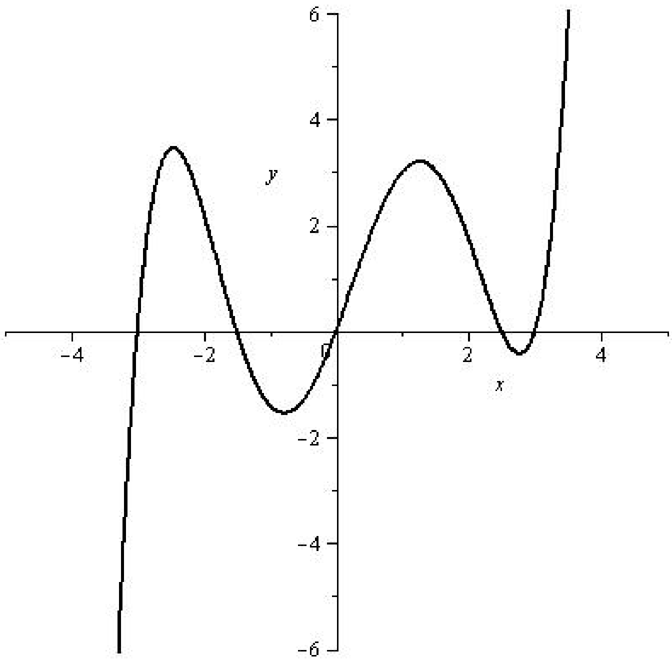


Bild 5.H Ein Polynom fünften Grades

Der nächste Abschnitt behandelt den Fall $n = 1$.

5.7.1 Allgemeine lineare Funktionen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, nennt man *allgemeine lineare Funktion*. Sie ist ein Polynom ersten Grades!

Skizzieren Sie den Graphen solch einer Funktion im Falle

1. $a = 0,\ b = 2$
2. $a = 1,\ b = 0$
3. $a = -1,\ b = -0.5$ ▷

5.7.2 Beispiele

1. Schreiben Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - |1 - x| - |x + 2|$ ohne Beträge. Skizzieren Sie ihren Graphen.

Lösung: Zunächst ermitteln wir die kritischen Punkte, in denen die Terme innerhalb der Betragsstriche das Vorzeichen wechseln. Das sind die Punkte 1 und -2.

Das führt uns auf die drei Teilintervalle von $\mathbb{R}$: $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$ und $[1, \infty)$ auf denen eine einheitliche Darstellung ohne Beträge möglich ist.

Sei $x \in (-\infty, -2)$: Hier gilt

$$f(x) = 2 - |1 - x| - |x + 2| = 2 - (1 - x) + (x + 2) = 3 + 2x$$

Sei $x \in [-2, 1)$: Hier gilt

$$f(x) = 2 - (1 - x) - (x + 2) = -1$$

Sei $x \in [1, \infty)$: Hier gilt

$$f(x) = 2 + (1 - x) - (x + 2) = -2x + 1$$

Insgesamt ist

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 1 \\ 1 - 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

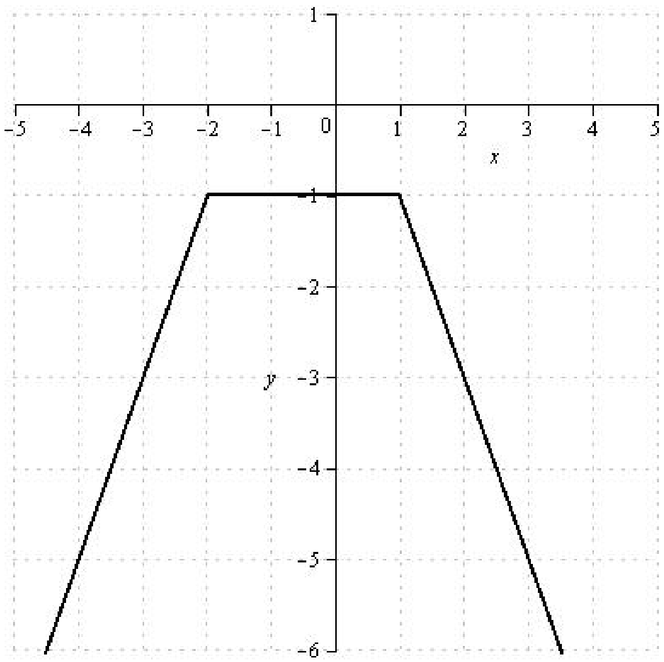


Bild 5.I Graph der Funktion f

2. Bilden Sie von $f : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$, die Umkehrfunktion und zeichnen Sie deren Bilder.

Lösung: Wie auf der Skizze zu sehen ist die Funktion f injektiv und somit invertierbar. Wir lösen zunächst die Gleichung $y = \frac{x-1}{x+1}$ nach y auf.

Sei $x \neq -1$.

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & \frac{x-1}{x+1} \\ \Leftrightarrow & (x+1)y & = & x-1 \\ \Leftrightarrow & x(y-1) & = & -1-y \\ \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} & x & = & -\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \end{array}$$

Um die Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen, muss man sich klarmachen, dass das obige y die Variable sein soll und man daher in der letzten Gleichung x und y vertauschen muss. Wir erhalten also: $f^{-1} : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

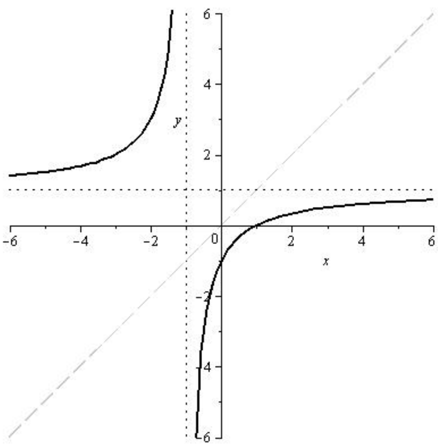


Bild 5.J Graph der Funktion f

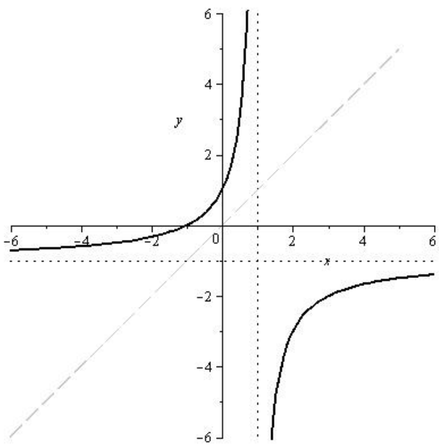


Bild 5.K Graph der Funktion f^{-1}

3. Geben Sie den Definitionsbereich und die Wertemenge von f an und bilden Sie $x = f^{-1}(y)$ mit

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}, \quad a > 0.$$

Lösung: Es gilt $\mathbb{D}_f = [0, \infty)$ und $\mathbb{W}_f = (0, 1/\sqrt{a}]$. Insbesondere gilt also $y \neq 0$.

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a}+\sqrt{x} & = & \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} & = & \frac{1}{y} - \sqrt{a} \\ \overset{\sqrt{x}\geq 0}{\Leftrightarrow} & x & = & \left(\frac{1}{y} - \sqrt{a}\right)^2 \end{array}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Wir halten zusätzlich fest: $f^{-1} : \mathbb{W}_f \to \mathbb{D}_f,\ x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \sqrt{a}\right)^2$.

5.8 Verkettung von Funktionen

Hat die Funktion g den Definitionsbereich $\mathbb{D}_g$ und die Bildmenge $\mathbb{W}_g$ und ist die Funktion f für alle $z \in \mathbb{W}_g$ definiert, so ist durch

$$f \circ g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x))$$

eine Funktion definiert, die man f *nach* g oder *die Hintereinanderausführung von* g *und* f oder *die Verkettung von* f *und* g nennt.

Als Anwendung der obigen Definition wollen wir uns verschiedenen Manipulationen von Graphen widmen, wie Verschieben, Spiegeln, Strecken oder Stauchen. Dieses wird durch besonders einfache Verkettungen bewirkt, auch wenn diese der Einfachheit halber nicht mehr explizit aufgeschrieben werden. Die Betrachtung dieser Verkettungen erlaubt einem häufig, auf einfache Weise den Graphen der resultierenden Funktion f zu zeichnen oder Definitions- und Bildmenge zu bestimmen.

5.8.1 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = -x^2 + x + 2$ definiert.

Es gilt $f(x) = -x^2+x+2 = -(x^2-x-2) = -\big[(x-1/2)^2-1/4-2\big] = -\big[(x-1/2)^2-9/4\big]$

Der Graph von f entsteht nun aus dem Graphen von g mit $g(x) = x^2$ durch Verschieben um $1/2$ nach rechts, Verschieben um $-9/4$ nach unten und Spiegelung an der x-Achse.

Daraus ist ersichtlich, dass $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_f = (-\infty, 9/4]$ gilt.

Allgemein sei f durch

$$f(x) = \pm\mathbf{c} \cdot g\big(\pm\mathbf{b}(\cdot x + \mathbf{a})\big) + \mathbf{d}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}, \mathbf{b}, \mathbf{c} > 0$$

gegeben. Wobei g eine elementare Funktion mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ sei. Ist $\mathbb{D}_g \neq \mathbb{R}$, so müssen die Definitionsbereiche der kombinierten Funktionen entsprechen angepasst werden, worauf wir hier wegen der Übersichtlichkeit aber nicht eingehen.

Im Folgenden werden wir alle Schritte anhand $g(x) = x^3$ illustrieren.

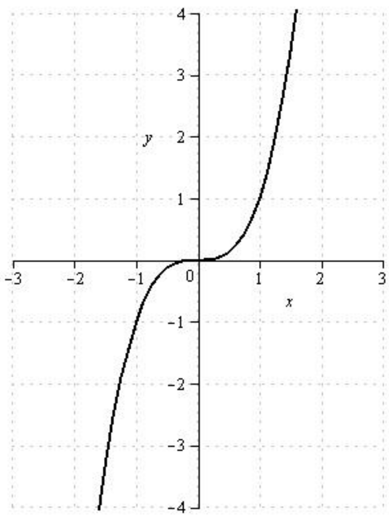


Bild 5.L $g(x) = x^3$

In Bezug auf den Graphen von $f(x) = \pm\mathbf{c} \cdot g\big(\pm\mathbf{b}(\cdot x + \mathbf{a})\big) + \mathbf{d}$ bewirkt

- **a** eine Verschiebung des Graphen von g um $-\mathbf{a}$ entlang der x-Achse (s. Bild 5.M);
- **b** eine $1/\mathbf{b}$-fache Streckung in Richtung der x-Achse (für $\mathbf{b} > 1$ wird der Graph also gestaucht) (s. Bild 5.N);
- – vor **b** eine Spiegelung an der Achse $x = -\mathbf{a}$ (s. Bild 5.O);

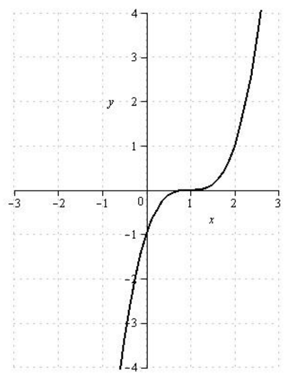


Bild 5.M $g(x-1) = (x-1)^3$

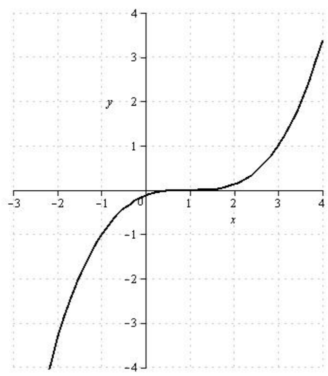


Bild 5.N $g(1/2(x-1))$

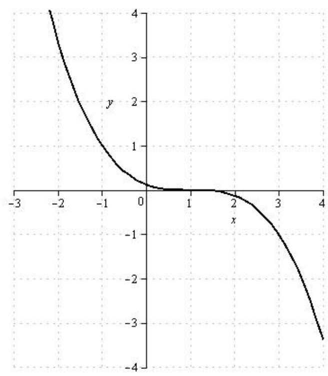


Bild 5.O $g(-1/2(x-1))$

- **c** eine **c**-fache Streckung in Richtung der y-Achse (s. Bild 5.P);
- – vor **c** eine Spiegelung an der x-Achse (s. Bild 5.Q);
- **d** eine Verschiebung des Graphen um **d** in Richtung der y-Achse (s. Bild 5.R).

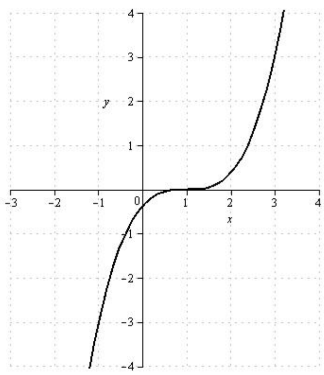


Bild 5.P $3 \cdot g(-1/2(x-1))$

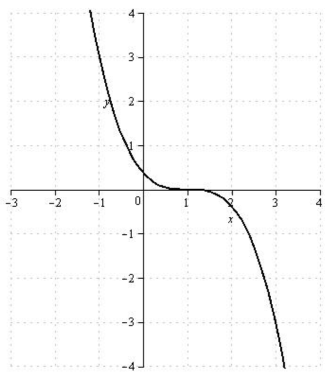


Bild 5.Q $-3 \cdot g(-1/2(x-1))$

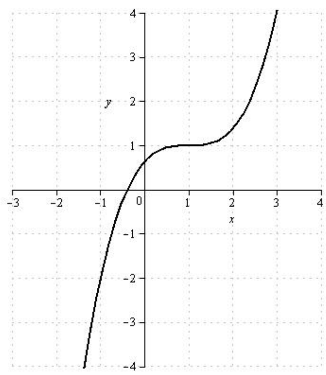


Bild 5.R $3 \cdot g(-1/2(x-1)) + 1$

5.8.2 Beispiele

1. Die Funktion f sei durch die Zuordnungsvorschrift

$$y = \ln(-x^2 + x + 2)$$

gegeben. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an.

Lösung: Die Funktion f ist in der Form $u \circ v$ mit $u = \ln$ und $v = -x^2 + x + 2$. Wir müssen nun den Definitionsbereich $\mathbb{D}_v$ so wählen, dass u für alle $z \in \mathbb{W}_v$ definiert ist. D.h. wir suchen die Menge $\mathbb{D}_v = \{x \in \mathbb{R} | -x^2 + x + 2 > 0\}$

Durch Ausprobieren erhalten wir die zwei Nullstellen -1 und 2 der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ (Normalform). Wir verfahren wie in **Abschnitt 4.2.2** dargestellt.

$-x^2 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$. Also ist $\mathbb{D}_v = (-1, 2)$. Mit dem Ergebnis aus **Beispiel 5.8.1** erhalten wir $\mathbb{W}_v = (0, 9/4]$. Wegen der Monotonie von u ist somit $\mathbb{W}_f = (-\infty, \ln 9/4]$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_v = (-1, 2)$.

2. Skizzieren Sie das Bild der Funktion f mit

$$f(x) = -\sqrt{4 - (x-1)^2}$$

Geben Sie zunächst ihren Definitionsbereich an.

Lösung: Es gilt $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | 4 - (x-1)^2 \geq 0\}$. Dazu berechnen wir

$$\begin{array}{rrcl} & 4 - (x-1)^2 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & |x-1| & \leq & 2 \\ \Leftrightarrow & -2 \leq x - 1 & \leq & 2 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq x & \leq & 3 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{D} = [-1, 3]$.

Kreisgleichung In Abschnitt 4.6.4 haben wir die Kreisgleichung für den *Einheitskreis*, d.h. für den Kreis um Null mit Radius $r = 1$ kennen gelernt: $x^2 + y^2 = 1$. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann lautet die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad x, y, \in \mathbb{R}$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung beschreibt einen Kreis um (x_0, y_0) mit Radius r. Durch Umformung sieht man, dass der Graph des Kreises sich aus den Funktionen, welche durch

$$y_1 = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0, \qquad x \in [x_0 - r, x_0 + r], \quad \text{(oberer Halbkreis)}$$

und

$$y_2 = -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0, \qquad x \in [x_0 - r, x_0 + r], \quad \text{(unterer Halbkreis)}$$

beschrieben werden, zusammen setzt. Mit den obigen Überlegungen erkennt man, dass der resultierende Kreis aus einer Verschiebung um x_0 „nach rechts" und y_0 „nach oben" aus dem Kreis um Null mit Radius r hervorgegangen ist.

Zurück zur Aufgabenstellung: Das gegebene f stellt einen unteren Halbkreis um $(1, 0)$ mit Radius $r = 2$ dar:

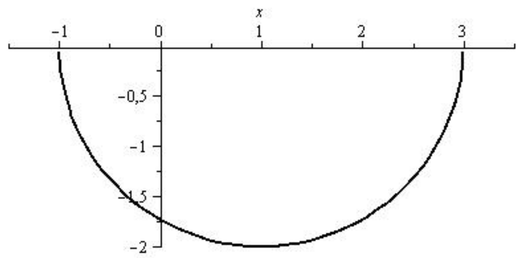


Bild 5.S

6 Trigonometrische Funktionen

6.1 Herleitung und Definition

Für ein rechtwinkliges Dreieck

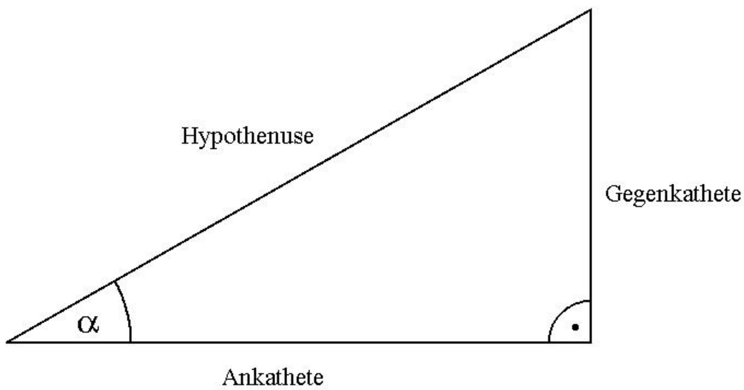


Bild 6.A

gelten die Definitionen

$$\sin\alpha := \text{Gegenkathete}/\text{Hypotenuse},$$

$$\cos\alpha := \text{Ankathete}/\text{Hypotenuse},$$

$$\tan\alpha := \text{Gegenkathete}/\text{Ankathete}.$$

Diese Definition ist nur für $\alpha < 90°$ möglich.

Die sog. *Trigonometrischen Funktionen* sin und cos erweitern diese Darstellung auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Dies soll aus der Anschauung des Einheitskreises hergeleitet werden.

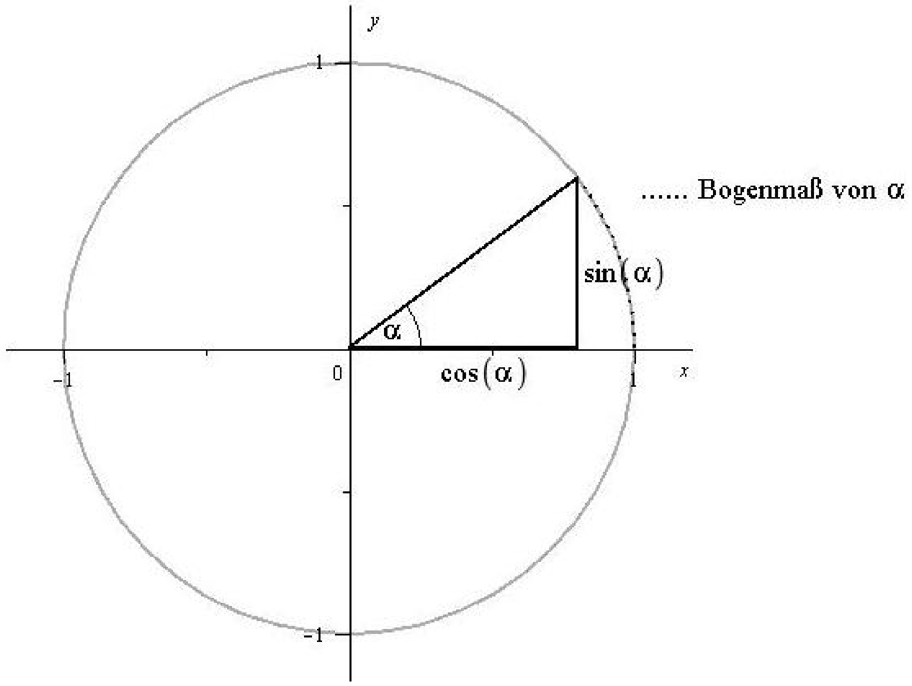


Bild 6.B

Daraus leiten wir die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ab. Wir können Folgendes ablesen: Die Wertemengen $\mathbb{W}_{\sin}$ und $\mathbb{W}_{\cos}$ sind jeweils das Intervall $[-1, 1]$. Die Funktionen sind periodisch mit Periode 2π.

6.1.1 Schaubild des Sinus und Cosinus

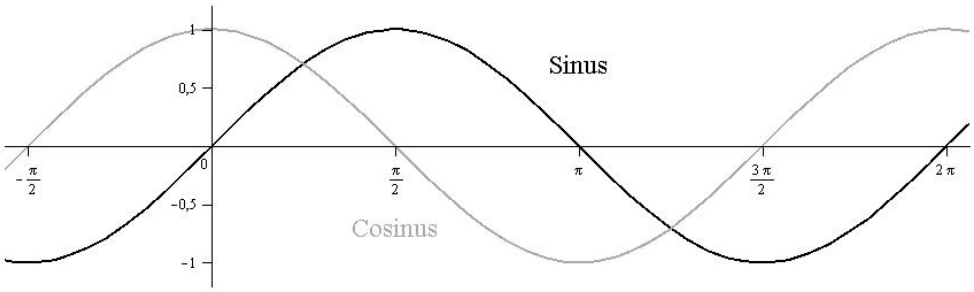


Bild 6.C

6.1.2 Umrechnung von Grad- und Bogenmaß

Der Umfang des Einheitskreises ist 2π. Daraus leitet sich das Bogenmaß ab, dass im Folgenden statt des Gradmaßes verwendet wird.

Es gilt $180° \mathrel{\widehat{=}} \pi$. Also bestehen zwischen dem Gradmaß a und dem Bogenmaß b die Beziehungen

$$a° = \frac{180}{\pi}\, b$$
$$b = \frac{\pi}{180}\, a°$$

6.1.3 Schaubild des Tangens und Cotangens

Der Tangens

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

ist definiert für
$x \in \mathbb{R} \setminus \{x | \cos x = 0\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Cotangens

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

ist definiert für
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

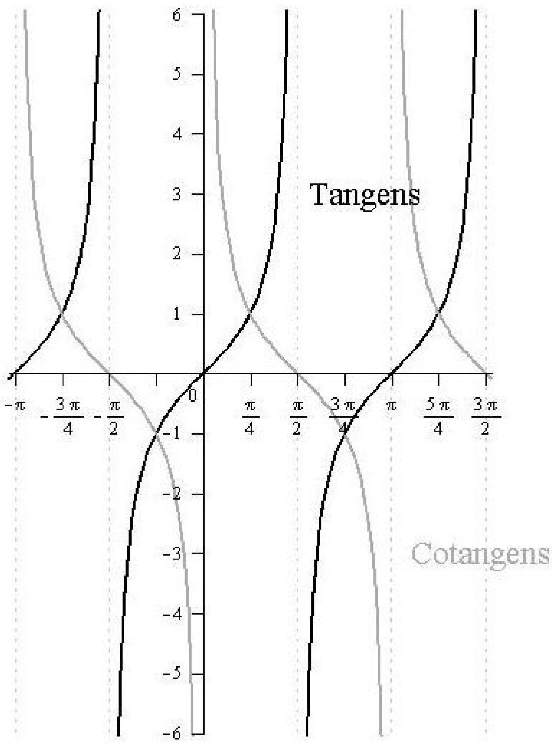


Bild 6.D

Die Funktionen sin und cos, bzw. tan und cot sind periodisch mit den Perioden 2π bzw. π. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2k\pi),$$
$$\tan x = \tan(x + k\pi), \quad \cot x = \cot(x + k\pi).$$

6.1.4 Spezielle Werte

Leiten Sie folgende spezielle Funktionswerte aus der Anschauung des Einheitskreises her.

x in °	x im Bogenmaß	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0°				
30°				
45°				

6.1.5 Die Additionstheoreme

Es gilt

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, mit der Schreibweise $\sin^2 x := (\sin x)^2$
2. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
3. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

6.1.6 Beispiel

Machen Sie sich anschaulich klar, dass

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

gilt (vgl. Beispiel 5.8.1)und beweisen Sie dieses mit den Additionstheoremen.

7 Einige Beweise

Mathematische Beweise

Kann eine Behauptung $\mathcal{B}$ allein durch logische Verknüpfungen aus einer gegebenen Voraussetzung $\mathcal{A}$, bereits bewiesenen Aussagen und geltenden Axiomen gefolgert werden, so gilt $\mathcal{B}$ als bewiesen. Wir unterscheiden die folgenden Beweistechniken:

Der direkte Beweis

Hier wird die Behauptung $\mathcal{B}$ durch die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ gezeigt.

Beispiel 1

Beweisen Sie: das Quadrat jeder geraden natürlichen Zahl n ist gerade.

Anmerkungen: Die Voraussetzung lautet „n ist gerade“. Dh. es existiert eine natürliche Zahl k mit $n = 2k$. Die Behauptung lautet „n^2 ist gerade“.

Beweis. Wegen $n = 2k$ für eine geeignete natürliche Zahl k gilt:

$$n^2 \overset{Vor.}{=} (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$$

Die Zahl n^2 ist also das Doppelte einer natürlichen Zahl und somit gerade. $\square$

Beispiel 2

Beweisen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade. ▷

Der indirekte Beweis (auch: Widerspruchsbeweis)

Hier nimmt man unter gegebenen Voraussetzungen an, dass die Behauptung falsch ist und führt das zu einem Widerspruch. Aus dem Widerspruch folgert man, dass die Behauptung nicht falsch sein kann. Dann muss sie aber richtig sein (warum?).

Beispiel 3 Beweisen Sie: Die Darstellung einer rationalen Zahl r als gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ ist eindeutig.

Beweis. Vorbemerkung: Nach Definition der rationalen Zahlen bezeichnen zwei Zahlen $\frac{m}{n}$, $\frac{j}{k}$, $m, j \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$, das gleiche Element $r \in \mathbb{Q}$, falls $m \cdot k = j \cdot n$ gilt. Bsp. $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$, da $6 \cdot 6 = 4 \cdot 9$ gilt.

Zum Beweis: Wir nehmen an, r hätte zwei verschiedene gekürzte Darstellungen $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ mit $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = \mathrm{ggT}(p'q') = 1$ (ggT bezeichne den „größten gemeinsamen Teiler“). Wegen $p\,q' = q\,p'$ gilt $q \,|\, p\,q'$ („q teilt $p\,q'$“), wegen $\mathrm{ggT}(q, p) = 1$ muss zudem $q \,|\, q'$ gelten. Analog zeigt man $q' \,|\, q$.

Aus $q \,|\, q'$ und $q' \,|\, q$ folgt nun aber $q = q'$ und damit $p = p'$. Das steht im Widerspruch zur Annahme! Damit ist die behauptete Eindeutigkeit gezeigt. □

Beispiel 4 Beweisen Sie: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Voraussetzung gilt

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad (*)$$

und damit $2n^2 = m^2$. Nach **Beispiel 1+2** ist m somit eine gerade Zahl, dh. für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $m = 2 \cdot k$. Damit formen wir $(*)$ um und erhalten $2n^2 = 4k^2$, also $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n^2 und damit n eine gerade Zahl.

Widerspruch zur Annahme $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$! Also kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein. □

Beispiel 5 Beweisen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Annahme: es gibt nur endlich viele, nämlich n Primzahlen, $n \in \mathbb{N}$. Sei p_n die größte dieser Primzahlen. Betrachte nun das Produnkt all dieser Primzahlen $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ und die Zahl $q := m + 1$.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder q ist eine Primzahl, offensichtlich mit $q > p_n$, oder q ist selbst keine Primzahl. Im zweiten Fall sei p ein Primteiler von q. Wir zeigen nun, dass $p \notin \{p_i | i = 1...n\}$ gilt, dass also $p > p_n$ gelten muss:

Wäre p eine der Primzahlen $p_1, ..., p_n$, so teilte p sowohl m als auch $m + 1$ und damit auch die Differenz $1 = m + 1 - m$. Wid.! Also gilt $p > p_n$!

Beide Fälle liefern also einen Widerspruch zur Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt! Es gibt also unendlich viele Primzahlen! $\square$

Es gibt noch weitere Beweistechniken, wie *der konstruktive Beweis* oder *die vollständige Induktion*.

8 Anhang

Lösungen zu den Beispielen des Skriptes

1.8.4.1:

$$\begin{array}{rcl} x-2 & > & 2x-1 \\ \Leftrightarrow \quad -x & > & 1 \\ \Leftrightarrow \quad x & < & -1 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-\infty, -1)$

$$\begin{array}{rcl} 2(x-1) & < & 6(x+\frac{5}{3}) \\ \Leftrightarrow \quad -4x & < & 12 \\ \Leftrightarrow \quad x & > & -3 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-3, \infty)$

1.8.4.2:

$9xy + 3y + 6x + 2 = 3y(3x+1) + 2(3x+1) = (3y+2)(3x+1)$

$2p^3 + 9q^2 - 3p^2q - 6pq = p^2(2p-3q) - 3q(2p-3q) = (p^2-3q)(2p-3q)$

1.8.4.3:

$c^2 - 1 = (c+1)(c-1)$

$y^2 - 12y + 36 = (y-6)^2$

$16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 = (4x^2-y^2)^2 = \big((2x+y)(2x-y)\big)^2$

1.8.4.4:

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

2.1.1:

Wahr für: 1 Teilnehmer trägt Brille; mehrere Teilnehmer tragen eine Brille; alle Teilnehmer tragen eine Brille.

Falsch für: keine Teilnehmer trägt eine Brille.

2.1.2:

Diese Aussage ist genau für $x = 0$ wahr!

3.2.4:

1. Unter der Bedingung $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2} = \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c).$$

2. Unter der Bedingung $b > 0$ und $a > b$ gilt

$$\log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2) = \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{3}{2}\log(a-b).$$

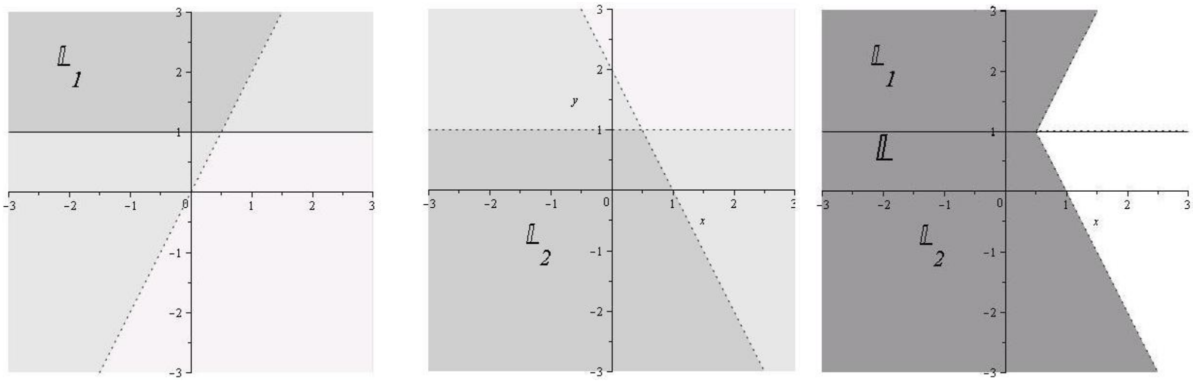
3.3.2:

1. $a^2 = 4 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow a = 2, -2$
2. $a^2 > 3 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{3} \Leftrightarrow a < -\sqrt{3}$ od. $a > \sqrt{3},$ also $a \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

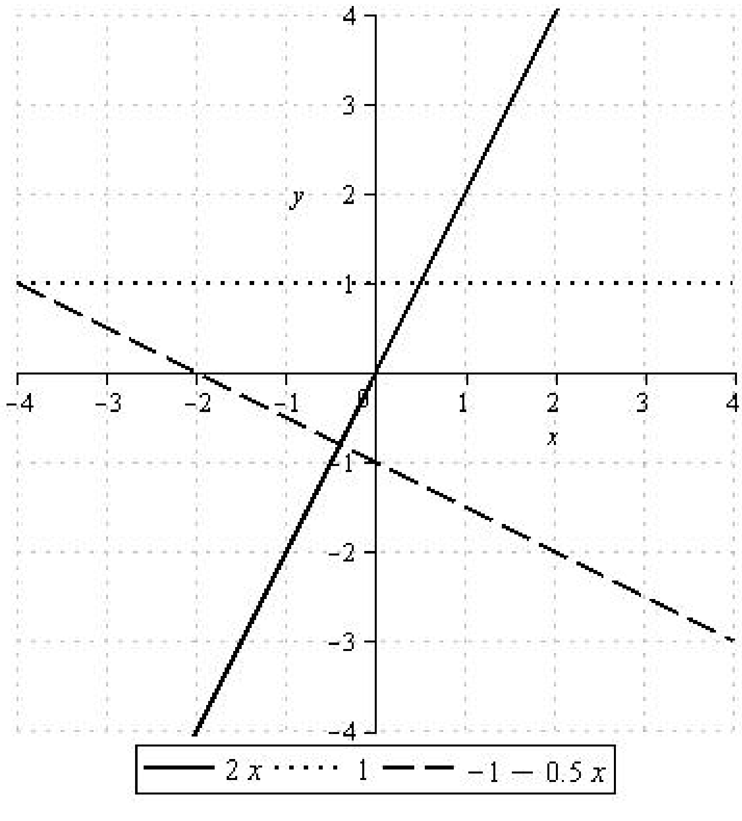
3.3.3:

1. $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$, dh. $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
2. $|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - 2 < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$, dh. $x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

4.6.6:



5.7.1:



6.1.4:

x in °	x im Bogenmaß	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1

7 Beispiel 2:

Beweisen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.

Beweis. Wegen $n = 2k + 1$ für eine geeignete natürliche Zahl k gilt:

$$n^2 \overset{Vor.}{=} (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1 = 2\,m + 1$$

mit $m = 2k^2 + 2k$. Somit ist n^2 eine ungerade Zahl. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann und J. Escher *Analysis I*, Birkhäuser, Basel, 2006

[2] E. Cramer und J. Nešlehová, *Vorkurs Mathematik. Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen.*, EMIL@A-stat, Springer, 2008

[3] R. Janßen und K. Benecke, *Studienvorbereitung: Mathematik in den Naturwissenschaften -Teil 1-*, Oldenburg, 1996

[4] W. Schäfer und K. Georgi, *Vorbereitung auf das Hochschulstudium*, BSB B. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985

Index

$<$, 13
$=$, 13
$>$, 13
$A \setminus B$, 12
$\mathbb{D}$, 24, 36
$\mathbb{L}$, 15
$\Leftrightarrow$, 10
$\mathbb{N}$, 12
$\mathbb{Q}$, 12
$\mathbb{R}^2$, 30
$\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, 36
$\Rightarrow$, 10
$\mathbb{W}$, 36
$\mathbb{Z}$, 12
$\emptyset$, 11
$\geq$, 13
$\in$, 10
$\leq$, 13
$\log_b a$, ln, 21
$\neg$, 10
π, 13
$\subset$, 11
$\vee$, 10
$\wedge$, 10
$f \circ g$, 42

$\mathbb{D}_f$, 36
$\mathbb{W}_f$, 36

Abbildung, 34
Additionstheoreme, 49
allgemeine lineare Funktion, 39
Aussage, 9

Basis, 19, 21
Betragsungleichungen, 29
Beweis
    der direkte Beweis, 50
    der indirekte Beweis, 51
Beweistechniken, 50
Bild, 35
Bildmenge, 35, 36
binomische Formeln, 14
Bogenlänge des Einheitskreises, 13, 47
Bogenmaß, 47
Bruchrechnung, 14, 51
Bruchungleichungen, 27

Cosinus, 47
Cotangens, 48

Definitionsbereich, 34
Definitionsmenge, 24

Eigenschaft, 11, 17
Einheitskreis, 45, 46
Element einer Menge, 10
elementare Funktionen, 36
Exponent, 19
Exponentialfunktion, 37

Fallunterscheidungen, 27
Funktion, 34
    gerade, 35
    symmetrische, 35
    trigonometrische Funktion, 46
    ungerade, 35
Funktionen
    elementare, 36

ganze Zahlen, 12

gerade Funktion, 35
Gradmaß, 47
Graph einer Funktion, 34

Hintereinanderausführung von Funktionen, 42

injektiv, 35
Intervall, 15
  abgeschlossenes, 15
  offenes, 15

kartesisches Produkt, 17, 30
Kreisgleichung, 45
Kreuzprodukt, 17

Lösungsmenge, 15, 24
leere Menge, 11
Logarithmengesetze, 21
Logarithmus
  Basis, 21
Logarithmusfunktion, 37
Logharithmus, 21
logische Verknüpfungen, 9

Menge, 10
monoton, 35
  fallend, 35
  wachsend, 35

natürliche Zahlen, 12
Negation, 18
negative Zahlen, 36
nicht negative Zahlen, 36

Obermenge, 11

Parabel, 25, 26
Polynom, 38
  n-ten Grades, 38
positive Zahlen, 36
Potenz, 19
  gebrochene, 20
Potenzfunktionen, 36
Potenzgesetze, 19
Prädikatenlogik, 17

quadratische Gleichungen, 24
quadratische Ungleichungen, 24
quadratisches Ergänzen, 24
Quantoren, 17

rationale Gleichung, 26
rationale Zahlen, 12
reelle Zahlen
  Rechenregeln, 14
reellwertige Funktion, 35
relatives Komplement, 12

Schnittmenge, 11
Sinus, 47
streng monoton, 35
symmetrisch, 35

Tangens, 48
Teilmenge, 11
trigonometrische Funktionen, 46
  spezielle Werte, 48

Umkehrfunktion, 35
Umrechenformel, 21
ungerade Funktion, 35
Ungleichungen, 24
  Regeln, 14

Vereinigungsmenge, 11
Verkettung von Funktionen, 42
Verneinung, 18

Wertebereich, 34, 36
Wertemenge, 35
Wurzel, 19
  q-te, 19
Wurzelgesetze, 20
Wurzelgleichungen, 26

Zuordnungsvorschrift, 34