Seminar in Analysis im WS 2016/17

H^∞-Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Dozent: Lutz Weis
Zeit: Freitag, 11.30
Ort: Mathematikgebäude, 2.066
Vorbesprechung: Dienstag, den 19.07.2016, 13.15 Uhr in 2.066

Ein zentraler Satz der Analysis besagt, dass selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum ähnlich sind zu einem Multiplikationsoperator und einen Funktionalkalkül für messbasre Funktionen besitzen. Für Hilbertraumoperatoren, die nicht normal sind, oder für die Erweiterung von selbstadjungierten Operatoren auf L^p-Räume trifft dies nicht mehr zu. Jedoch haben viele Operatoren A, die in den Anwendungen der Analysis in den den Naturwissenschaften, in der Numerik oder der Stochastik wichtig sind, einen H^∞-Funktionalkalkül, d.h. es gibt einen Algebrahomomorphismus

$$H^\infty(\Sigma_\theta) \ni f \mapsto f(A) \in B(X)$$

von den beschränkten analytischen Funktionen f auf einem Sektor $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \theta\}$ in die beschränkten Operatoren auf dem A zugrunde liegenden Banachraum X. Genauso wie der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren hat dieser Funktionalkalkül viele Anwendungen in der Theorie der Evolutionsgleichungen, insbesondere für Regularitätsaussagen für Lösungen. Für einen selbstadjungierten Operator auf einem Hilbertraum wird insbesondere die Äquivalenz folgender Aussagen bewiesen:

i) A hat einen beschränkten $H^\infty(\Sigma_\theta)$-Kalkül mit $\theta < \pi/2$.

ii) A ist akkretiv in einem äquivalenten Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$, d.h. es gilt $[Ax, x] \in \Sigma_{\pi/2}$ für alle $x \in D(A)$.

iii) A erzeugt eine analytische Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$, die in einem äquivalenten Hilbertraum Norm-kontraktiv ist.

iv) A hat eine Dilation zu einem Multiplikationsoperator, d.h. A ist die Einschränkung eines Multiplikationsoperators auf einem größeren Hilbertraum.

Nach *ii)* gibt es also viele Differentialoperatoren (z.B. elliptische), die diese Aussagen erfüllen. *iii)* stellt den Zusammenhang zu Evolutionsgleichungen und *iv)* den Zusammenhang zu der Theorie der selbstadjungierten Operatoren her. Entsprechende Aussagen gibt es auch für Operatoren auf L^p-Räumen.

Vorkenntnisse: Funktionalanalysis
Literatur: P. Kunstmann, L. Weis: *Maximal L_p-regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-functional calculus*