

**Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft  
Wintersemester 2009/2010**

**15. Übungsblatt vom 08. Februar 2010**

**Aufgabe 1:**

Sei  $p \in \mathbb{R}^+$ . Wir definieren auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  die Funktionen

$$\| \cdot \|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\| \cdot \|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

(a) Skizzieren Sie die Einheitskreise  $K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$  für  $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \infty$ .

(b) Sei  $p < 1$  und  $n \geq 2$ . Begründen Sie, dass  $\| \cdot \|_p$  keine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Aufgabe 2:**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine positiv definite (und symmetrische) Matrix.

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_A := \langle v, Aw \rangle_2 = v^t Aw$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  definiert ist.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei der Untervektorraum des  $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{spann} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine ONB von  $U$  bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts.

**Aufgabe 4:**

Im  $\mathbb{R}^4$ , versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt, seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von  $z$  auf den Unterraum  $U = \text{spann}\{v_1, v_2, v_3\}$ .

**Aufgabe 5:**

Es sei die Abbildung  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Tx = Ax$ , mit

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -\alpha \\ -1 & 4 & -\alpha \\ \alpha & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

gegeben.

- (a) Bestimmen Sie alle  $\alpha > 0$ , für die  $T$  eine Isometrie bezgl. des Euklidischen Skalarprodukt ist.
- (b) Berechnen Sie für diese  $\alpha$  aus (a) jeweils die Normalform  $\tilde{A}$  von  $T$  und eine orthogonale Matrix  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so dass  $S^t A S = \tilde{A}$  gilt.

---

**Keine Abgabe!**