Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Mathematik II für die Fachrichtung Informationswirtschaft
Sommersemester 2009

PD Dr. Nicolas Neuß, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

1. Übungsblatt 27. April 2009

Aufgabe 1: (2 Punkte) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls $sx + (1-s)y \in M$ für alle $x, y \in M$ und alle $s \in (0,1)$ gilt. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ist konvex.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Sei $p \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Funktionen

$$\|\cdot\|_p : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ , \quad x \longmapsto \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} ,$$
$$\|\cdot\|_\infty : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ , \quad x \longmapsto \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i| .$$

a) Skizzieren Sie die Einheitskreise $K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \infty$.

b) Sei $p < 1$. Begründen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ keine Norm ist.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Weisen Sie mathematisch präzise nach, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$ ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Finden Sie eine Norm, die nicht von einem Skalarprodukt induziert wird und beweisen Sie dies.

Aufgabe 5: (3 Punkte) Sei $V = C^0([0,1])$ der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Dann definiert

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx , \qquad f, g \in V .$$

ein Skalarprodukt auf V. Die Monome $1, x, x^2 \in V$ sind linear unabhängig. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des Vektorraums der quadratischen Polynome bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\8/3\\5\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}0\\-7\\23\end{pmatrix}$ und die Ebene $E = \{v \in \mathbb{R}^3 | \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \colon \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v\}$. Finden Sie eine Darstellung $u = u_\parallel + u_\perp$, sodass $u_\parallel \in E$ und $u_\perp \perp E$, d.h. $\langle u_\perp, v\rangle = 0$ für alle $v \in E$.

Website zur Vorlesung: *http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/mi2inwi2009s*
Abgabe: Werfen Sie Ihre Löungen bis zum **04.05.2009**, **11.30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Mathematik für Informationswirte“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppe (A-D) und Ihre/n Tutor/-in.