Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Mathematik II für die Fachrichtung Informationswirtschaft
Sommersemester 2009

PD Dr. Nicolas Neuß, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

12. Übungsblatt mit Lösungen 28. Juli 2009

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$. Es gilt $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln 2 \approx 0.693147$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei nun $Z_n = \{x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \dots, x_n = 1 + \frac{n}{n}\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$ die Ober-, Unter-, und Riemannsummen sowie den entsprechenden Fehler. Für die Riemannsumme sollen die Intervallmittelpunkte als Zwischenstellen verwendet werden, für die Ober- bzw. Untersumme sind die Zwischenstelle im jeweiligen Intervall so zu wählen, dass die Funktion $f(x)$ für die Obersumme innerhalb des Flächen-Rechteckelementes bzw. für die Untersumme außerhalb verläuft.

Lösung: Ein kleines Programm liefert:

Typ	n	Wert	Fehler
links	1	1	0.30685282
links	2	5/6	0.14018613
links	3	47/60	0.09018618
rechts	1	1/2	-0.19314718
rechts	2	7/12	-0.10981387
rechts	3	37/60	-0.07648051
Mitte	1	2/3	-0.02648049
Mitte	2	24/35	-0.00743287
Mitte	3	478/693	-0.00339251

Hierbei kennzeichnet der Typ die Lage des Auswertungspunkts im Intervall, so dass das obige offenbar Ober- und Untersumme, sowie den Wert für die Mittelpunktregel liefert.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x} \cos x\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x \arctan x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$,

e) $\displaystyle\int_1^{\pi^2+1} \sin(\sqrt{x-1})\,dx$,

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$,

h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{3+2x^2}\,dx$.

Lösung:

a) Partielle Integration liefert

$$\int_1^2 x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{16}(4\log x - 1)\,\Big|_1^2 = 4\log 2 - \frac{15}{16}$$

b) Zweifache partielle Integration liefert

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx = \left[\frac{e^x}{5}(\sin x + 2\cos x)\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{5}(e^{2\pi} + 1)$$

c) Wir nutzen aus, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und führen eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x \arctan x \, dx &= x/(1+x^2)|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - \frac{1}{1+x^2}) \, dx \\
&= \frac{-1}{2}(x \,|_{-1}^{1} - \arctan x \,|_{-1}^{1}) \\
&= -1 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d) Die Substitution $u = 1 - x^2$ liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-u)\sqrt{u} \, du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

e) Die Substitution $u = \sqrt{x-1}$ und anschließende partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_1^{\pi^2+1} \sin(\sqrt{x-1}) \, dx &= \int_0^{\pi} 2u \sin(u) \, du \\
&= [-2u\cos(u)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos u \, du \\
&= 2\pi + 2\,[\sin u]_0^{\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

f) Weil der Integrand eine ungerade Funktion ist, muss gelten

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx = 0$$

g) Wir substituieren zuerst $u = \sqrt{x}$ ($\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u}$), danach folgt eine partielle Integration, dann eine Substitution $u = \sqrt{2}\sin v$ ($\frac{du}{dv} = \sqrt{2}\cos v$):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} \, dx &= -\int_0^1 u\frac{-2u}{\sqrt{2-u^2}} \, du \\
&= \left[-u\sqrt{2-u^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2-u^2} \, du \\
&= -1 + \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{1-\sin^2 v}}{\cos v} \, dv \\
&= -1 + 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

h) Wir substituieren $y = x/\sqrt{\frac{3}{2}}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{3+2x^2}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{3(1+y^2)}\, dy \\
&= \frac{1}{3}\left[\arctan(y)\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}\, dx$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\, dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\, dx$, d) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$.

Lösung:

a) (Pi mal Daumen: Wegen des exponentiellen Abfalls existiert das Integral natürlich.) Substitution mit $u = e^x$ und Partialbruchzerlegung liefern

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}\, dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u(1+u)}\, du \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du \\
&= \left[\ln u - \ln(1+u)\right]_1^\infty \\
&= \left[\ln \frac{u}{1+u}\right]_1^\infty = \ln 2
\end{aligned}$$

b) (Pi mal Daumen: Die Funktion verhält sich für große x wie $\frac{1}{x^2}$, so dass das Integral existiert.) Die Substitution $u = 1 + x$ liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\, dx &= \int_0^\infty \frac{u-1}{u^3}\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\, du \\
&= \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^\infty \\
&= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) (Pi mal Daumen: Die Funktion $\ln x$ schmiegt sich sehr nahe an die y-Achse, somit existiert das Integral.) Wir wissen, dass die Stammfunktion von $\ln x$ gleich $x \ln x - x$ ist. Somit lässt sich eine partielle Integration wie folgt durchführen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln x)^2\, dx &= \left[(x\ln x - x)\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 (\ln x - 1)\, dx \\
&= \left[(x\ln x - x)\ln x - x\ln x + 2x\right]_0^1 \\
&= \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right]_0^1 \\
&= \lim_{a\downarrow 0} \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right]_a^1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

weil $\lim_{x\downarrow 0} x(lnx)^k = 0$.

d) (Pi mal Daumen: In einer Umgebung von 1 gilt $\ln x \approx x - 1$ und $\sqrt{\ln x} \approx \sqrt{x-1}$. Also existiert das Integral.)

Die Substitution $u = \ln x$ liefert

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = [2\sqrt{u}]_0^1 = 2$$

Aufgabe 4: Ebenso wie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ die Fläche unter dem Graphen von f über dem Intervall $[a,b]$ berechnet, so berechnet das zweifache Integral

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy := \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx$$

das Volumen unterhalb des Graphen von f über der Fläche $[a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie dieses Doppelintegral für $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ und $a = c = -1$, $b = d = 1$.

Lösung: Aus Symmetriegründen gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (1 + x^2 + y^2)\,dy \right)\,dx &= 4\int_0^1 \left(\int_0^1 (1 + x^2 + y^2)\,dy \right)\,dx \\
&= 4\int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{1}{3} \right)\,dx \\
&= 4\int_0^1 (\frac{4}{3} + x^2)\,dx \\
&= 4(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$