Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 4

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 10 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie zu $f \in C([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^M,$$

sowie ein S-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema $(\mathcal{A}, b, c)$. Zeigen Sie, dass die Anwendung von zwei Schritten des Verfahrens mit Schrittweite $\tau/2$ äquivalent ist zur Anwendung eines $2S$-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens mit Schrittweite τ. Bestimmen Sie für dieses Verfahren das Butcher-Schema in Abhängigkeit von $(\mathcal{A}, b, c)$.

Aufgabe 11 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren von Heun (zur Bestimmung von u^n) mit einem Kontrollverfahren (zur Bestimmung von $\widehat{u}^n$) zur Fehlerschätzung

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_{n-1}, u^{n-1}),\\
k_2 &= f(t_{n-1}+\tau, u^{n-1}+\tau k_1),\\
u^n &= u^{n-1} + \tfrac{\tau}{2}(k_1+k_2),\\
k_3 &= f(t_{n-1}+\tau, u^n),\\
k_4 &= f(t_{n-1}+\tau+\mu\tau, u^n+\mu\tau k_3),\\
\widehat{u}^n &= u^{n-1} + \tau\big(\widehat{b}_1 k_1 + \widehat{b}_2 k_2 + \widehat{b}_3 k_3 + \widehat{b}_4 k_4\big).
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie das erweiterte Butcher-Schema für obiges Verfahren an.

(b) Unter welchen Bedingungen an $\mu, \widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3, \widehat{b}_4$ hat das Kontrollverfahren die Ordnung $p = 3$? Zeigen Sie, dass für $\mu \notin \{-1, 0\}$ die Parameter $\widehat{b}_s$, $s = 1, \dots, 4$, eindeutig bestimmt sind. Diskutieren Sie auch die Fälle $\mu \in \{-1, 0\}$.

(c) Für welchen Wert von μ können bei akzeptierter Schrittweite zwei Funktionsauswertungen für den nächsten Zeitschritt benutzt werden? Bestimmen Sie auch die zugehörigen $\widehat{b}_s$, $s = 1, \dots, 4$.

Aufgabe 12 (mündlich)

Der harmonische Oszillator $\ddot{u}(t) = -u(t)$ lässt sich als System erster Ordnung schreiben als $\dot{w}(t) = f(t, w(t))$ mit

$$w(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -u(t) \end{bmatrix}.$$

Wenden Sie auf das System erster Ordnung die implizite Trapezregel an, d.h.

$$w^n = w^{n-1} + \frac{\tau}{2}\Big(f(t_{n-1}, w^{n-1}) + f(t_n, w^n)\Big),$$

und zeigen Sie, dass u^n dann der Differenzenformel aus Aufgabe 2 (Übungsblatt 1) genügt, d.h. u^n lässt sich rekursiv bestimmen durch

$$\frac{1}{\tau^2}\big(u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}\big) + \frac{1}{4}\big(u^n + 2u^{n-1} + u^{n-2}\big) = 0.$$

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 19.11.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.