Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 6

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 16 (schriftlich – 3 Punkte)

Zu Werten $f_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, definieren wir

$$\nabla^0 f_j = f_j\,, \qquad \text{und} \qquad \nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}\,, \quad k = 1, 2, \dots\,.$$

für $j \geq k$. Zeigen Sie, dass dann auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $\tau > 0$ gilt:

$$\nabla^k f_j = k!\,\tau^k f[t_{j-k}, \dots, t_j]\,.$$

Aufgabe 17 (Peano-Kern) (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie zu $u \in C^{q+1}([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ den lokalen Diskretisierungsfehler g_n eines linearen Mehrschritt-Verfahrens mit $k \in \mathbb{N}$ Schritten der Konsistenzordnung p. Zeigen Sie:

(a) Für $q \leq p$ hat der lokale Diskretisierungsfehler die Darstellung

$$g_n = \tau^q \int_0^k K_{q+1}(s) \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{q+1} u(t_{n-k} + s\tau)\, ds\,,$$

mit dem Peano-Kern

$$K_{q+1}(s) = \tfrac{1}{q!} \sum_{i=0}^k \alpha_i (i-s)_+^q - \tfrac{1}{(q-1)!} \sum_{i=0}^k \beta_i (i-s)_+^{q-1}\,,$$

wobei $(c)_+ = \max\{0, c\}$ für $c \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Die Fehlerkonstante des Verfahrens hat die Darstellung $C_{p+1} = \int_0^k K_{p+1}(s)\, ds$.

Hinweis: Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung mit Integral-Restglied.

Aufgabe 18 (mündlich)

Betrachten Sie das lineare Mehrschritt-Verfahren

$$u_n = u_{n-2} - a(u_{n-1} - u_{n-3}) + \tau\Big(b_1(f_{n-1} - f_{n-3}) + b_2 f_{n-2}\Big)\,,$$

in Abhängigkeit von $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und es gelte wieder $f_j = f(t_j, u_j)$. Bestimmen Sie a, b_1, b_2 so, dass das Verfahren maximale Konvergenzordnung besitzt. Diskutieren Sie anschließend die 0-Stabilität des Verfahrens.

Aufgabe 19 (Explizite Störmer-Verfahren) (mündlich)

Betrachten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t))\,, \qquad u(t_0) = u_0\,, \quad \dot{u}(t_0) = v_0\,.$$

mit $f \in C([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ und $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^M$. Zeigen Sie:

(a) Für eine Lösung $u \in C^2([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^M)$ gilt

$$\begin{aligned} &u(t+\tau) - 2u(t) + u(t-\tau) \\ &= \tau^2 \int_0^1 (1-s)\Big(f(t+s\tau, u(t+s\tau)) + f(t-s\tau, u(t-s\tau))\Big) ds\,. \end{aligned}$$

(b) Konstruieren Sie in Analogie zum expliziten Adams-Bashforth aus der Vorlesung ein explizites Mehrschritt-Verfahren, indem Sie den Integranden durch das Interpolationspolynom $P \in \mathcal{P}_{k-1}$ ersetzen. Dabei gelte $P(t_{n-i}) = f_{n-i}$ für $i = 1, \dots, k$. Bestimmen Sie das Verfahren für $k = 2$.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 2.12.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.