Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 12

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 38 (schriftlich – 3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $H : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $H(u,\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} u \\ \lambda \end{smallmatrix}\right]^T \left[\begin{smallmatrix} A & B^T \\ B & C \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} u \\ \lambda \end{smallmatrix}\right]$ mit $A, B, C \in \mathbb{R}^{M,M}$. Betrachten Sie auf $I = (a,b)$ die lineare Randwertaufgabe

$$u'(x) = \frac{d}{d\lambda} H(u(x), \lambda(x)), \qquad u(a) = u_0 \in \mathbb{R}^M,$$
$$\lambda'(x) = -\frac{d}{du} H(u(x), \lambda(x)), \qquad \lambda(b) = Nu(b), \quad N \in \mathbb{R}^{M,M}.$$

Das Problem soll mit der Mehrzielmethode an den Stellen $x_r = a + r\frac{b-a}{R}$, $r = 0, \dots, R$ mit $R \in \mathbb{N}$, gelöst werden. Formulieren Sie mithilfe der Matrix-Exponentialfunktion das entstehende Gleichungssystem.

Aufgabe 39 (schriftlich – 4 Punkte)
Sei $u \in C^4(\mathbb{R})$ und $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Zudem sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_k := x_0 + kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$, sodass

$$\Big| \frac{1}{6h}\big(-11u(x_0) + 18u(x_1) - 9u(x_2) + 2u(x_3)\big) - u'(x_0) \Big| \le C_1 h^3 \sup_{x_0 \le \xi \le x_3} |u^{(4)}(\xi)|,$$
$$\Big| \frac{1}{6h}\big(u(x_{-2}) - 6u(x_{-1}) + 3u(x_0) + 2u(x_1)\big) - u'(x_0) \Big| \le C_2 h^3 \sup_{x_{-2} \le \xi \le x_1} |u^{(4)}(\xi)|.$$

Bestimmen Sie die Konstanten C_1, C_2 möglichst genau.

Aufgabe 40 (mündlich)
Betrachten Sie das Eigenwert-Problem $-u''(x) = \mu u(x)$ in $I = (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$.

(a) Zu $p \in \mathbb{N}$ sei $\mu_p = (p\pi)^2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem μ_p eine Funktion $u_p(x)$ gibt, sodass $u_p(0) = u_p(1) = 0$ und $-u_p''(x) = \mu_p u_p(x)$ gilt.

(b) Zu $h = \frac{1}{N+1}$ sei $x_k = kh$. Bei der Diskretisierung von $-u''(x)$ auf I entsteht die Matrix $A_h = \frac{1}{h^2}\operatorname{tridiag}(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^{N,N}$. Die Eigenwerte von A_h sind $\lambda_p = \frac{2}{h^2}\big(\cos(p\pi h) - 1\big)$ (siehe Numerik I, Übungsblatt 5). Zeigen Sie für festes $p \in \{1, \dots, N\}$ die Relation $\lambda_p = \mu_p + O(h^2)$.

Aufgabe 41 (Optimale Kontrolle bei gewöhnlichen Dgl.) (mündlich)
Betrachten Sie auf $I = (a,b)$ die AWA $u'(x) = A(x)u(x) + B(x)p(x)$, $u(a) = u_0 \in \mathbb{R}^M$, mit Matrizen $A(x) \in \mathbb{R}^{M,M}$ und $B(x) \in \mathbb{R}^{M,P}$. Dabei ist $p : I \to \mathbb{R}^P$ eine wählbare "Kontrollfunktion" und zu fest gewähltem p sei $u_p(x)$ als Lösung der AWA der zugehörige "Zustand". Desweiteren sei zu Matrizen $C(x), D(x), R(x)$ und N (von passender Dimension) das Funktional

$$F(u,p) = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{bmatrix} u(x) \\ p(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C(x) & D(x)^T \\ D(x) & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ p(x) \end{bmatrix} dx + \frac{1}{2} u(b)^T N u(b)$$

gegeben und anhand von u_p lässt sich dann $f(p) = F(u_p, p)$ definieren. Zum Zustand $u(t)$ führen wir noch einen "adjungierten Zustand" $\lambda(t)$ ein und für diesen erhalten wir auf I die AWA $-\lambda'(x) = A(x)^T\lambda(x) + C(x)u(x) + D(x)^T p(x)$ mit der Endbedingung $\lambda(b) = Nu(b)$. Die Kontrollfunktion p sei nun so zu wählen, dass $Df(p) = 0$ gilt, wobei $Df(p)(x) = B(x)^T\lambda(x) + R(x)p(x) + D(x)u(x)$ für $x \in I$ gilt.

Insgesamt ist also das Tripel $(u(x), p(x), \lambda(x)) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^M$ gesucht, sodass die beiden AWA sowie die Bedingung $Df(p) = 0$ erfüllt sind.

(a) Unabhängig von $x \in I$ gebe es ein $\alpha > 0$ sodass $|R(x)q| \ge \alpha|q|$ für alle $q \in \mathbb{R}^{P,P}$ gelte. Zeigen Sie, dass sich das Problem dann als lineares Randwertproblem für $(u(t), \lambda(t))$ schreiben lässt. Bringen Sie dieses in die Form $y'(x) = \mathcal{A}(x)y(x) + \mathcal{B}(x)$, $B_a y(a) + B_b y(b) = g$.

(b) Formulieren Sie für die RWA aus (a) eine entsprechende Mehrzielmethode.

Organisatorisches:
Terminänderung Vorlesung/Übung: Die Vorlesung von **Freitag, 29.1.2010**, wird mit der Übung von **Donnerstag, 28.1.2010**, getauscht.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 29.1.2010, 11.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.