2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.1) Zur Funktion $f \in C([t_0, t_0+T] \times G, \mathbb{R}^M)$ definieren wir den Fluss

$$\phi\colon \mathscr{D} \subset [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

durch $\phi(t,\tau,z) = v(t+\tau)$, wobei $v \in C^1([t,t+\tau], G)$ Lösung einer AWA ist:

$$\begin{aligned} \dot v(s) &= f\big(s, v(s)\big) \qquad s \in [t, t+\tau] \\ v(t) &= z \end{aligned}$$

(2.2) Ein Einschrittverfahren wird durch eine Verfahrensfunktion

$$\psi\colon [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

definiert: Zu Schrittweiten $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ und $u_0 \in G$ setze

$$u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1}).$$

Wir setzen $|\tau| = \max_n \tau_n$. Der *diskrete Fluss* ist

$$\phi_\tau(t;\tau,z) = z + \tau\psi(t,\tau,z)\,.$$

(2.3) *globaler Fehler:* $e^n = u(t_n) - u^n$

lokaler Diskretisierungsfehler: $g^n = \dfrac{1}{\tau_n}\big(u(t_n) - u(t^{n-1})\big) - \psi\big(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1})\big)$

Es gilt $g^n = g(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1}))$ mit $g(t,\tau,z) = \frac{1}{\tau}(\phi(t,\tau,z) - z) - \psi(t,\tau,z)$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.3) Ein Einschrittverfahren heißt *konsistent*, wenn $\lim_{\tau \to 0} g(t,\tau,z) \longrightarrow 0$ gilt.
Es heißt *konsistent von der Ordnung p*, wenn $|g(t,\tau,z)| = O(\tau^p)$ gilt.
Es heißt *konvergent*, wenn $\lim_{\tau \to 0} \max_n e^n = 0$ gilt.
Es heißt *konvergent von der Ordnung p*, wenn $\max_n e^n = O(\tau^p)$ gilt.

(2.4) Wenn $\Lambda > 0$ existiert, so dass für die Verfahrensfunktion gilt

$$|\psi(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,y)| \le \Lambda |z-y| \qquad t \in [t_0, t_0+T], \quad \tau \le \tau_0, \quad z,y \in G\,,$$

dann gilt

$$|u(t_n) - u^n| \le |u(t_0) - u^0| \exp\big(\Lambda(t_n - t_0)\big) + \max_{j=1,\dots,n} |g_j| \, \frac{\exp\big(\Lambda(t_n-t_0)\big) - 1}{\Lambda}\,.$$

(2.6) Verfahren von der Konsistenzordnung p sind konvergent von der Ordnung p.

(2.7) Seien $\delta_n > 0$, $\mu_n, z_n \ge 0$ für $n = 0,\dots,N$ gegeben mit $z_n \le (1+\delta_n) z_{n-1} + \mu_n$ für $n = 1,\dots,N$.
Dann gilt $z_n \le z_0 \exp \Delta_n + \max_{j=1,\dots,n} \dfrac{\mu_j}{\delta_j}\big(\exp(\Delta_n) - 1\big)$ mit $\Delta_n = \sum_{j=1}^n \delta_j$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.8) Ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren mit S Stufen wird durch

Stützstellen	$c \in \mathbb{R}^S$	$(c_1 = 0$ für explizite Verfahren$)$
Gewichte	$b \in \mathbb{R}^S$	$\left(\sum_{s=1}^{S} b_s = 1\right)$
Koeffizienten	$\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{S,S}$	$(a_{sr} = 0$ für $s \leq r$ für explizite Verfahren$)$

definiert:

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s \quad \text{mit} \quad k_s = f\Big(t + c_s\tau,\ z + \tau \sum_{r=1}^{s-1} a_{sr} k_r\Big)\,.$$

(2.9) a) Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent, wenn
$\sum_{s=1}^{S} b_s = 1$ gilt.
b) Wenn ein explizites Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p hat, dann gilt $p \leq S$.

(2.10) Wenn für ein konsistentes Runge-Kutta-Verfahren $c_s = \sum_{r=1}^{S} a_{sr}$, $s = 1, \dots, S$ gilt, dann ist es invariant gegen Autonomisierung.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.11) Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent und von der Ordnung $p = 1$, wenn (1) $\sum_s b_s = 1$ gilt, konsistent von der Ordnung $p = 2$, wenn zusätzlich (2) $\sum_s b_s c_s = \frac{1}{2}$ gilt, konsistent von der Ordnung $p = 3$, wenn zusätzlich (3) $\sum_s b_s c_s^2 = \frac{1}{3}$ und (4) $\sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r = \frac{1}{6}$ gilt, und konsistent von der Ordnung $p = 4$, wenn zusätzlich (5) $\sum_s b_s c_s^3 = \frac{1}{4}$, (6) $\sum_{s,r} b_s c_s a_{sr} c_r = \frac{1}{8}$, (7) $\sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r^2 = \frac{1}{12}$, und (8) $\sum_{s,r,t} b_s a_{sr} a_{rt} c_t = \frac{1}{24}$ gilt.

(2.12) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann erfüllt die Verfahrensfunktion ψ für explizite Runge-Kutta-Verfahren eine Λ-Bedingung in (2.4).

(2.13) Ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \\ \hline & \hat{b}^T \end{array}$ definiert zwei Verfahrensfunktionen $\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s$, $\hat{\psi}(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} \hat{b}_s k_s$. Der lokale Diskretisierungsfehler wird durch $\eta = \psi(t,\tau,z) - \hat{\psi}(t,\tau,z)$ geschätzt.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.14) Sei $f \in C^k([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^m)$ und sei $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ eine Lösung von $\dot{u}(t) = f\big(t, u(t)\big)$. Dann gilt: $u \in C^{k+1}([t_0, t_1 + T], G)$.

(2.15) Sei f glatt und u Lösung einer AWA in $[t_0, t_0 + T]$. Sei ψ ein Verfahren der Ordnung p, und sei u_τ die diskrete Lösung.
Dann existieren glatte Funktionen $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots$ mit $a_j(t_0) = 0$ und

$$u_\tau(t) = u(t) + a_p(t)\tau^p + a_{p+1}(t)\tau^{p+1} + \cdots + O(\tau^{p+k})$$

für alle k und $t \in t_0 + \mathbb{N}\tau \cap [t_0, t_0 + T]$.

Anwendung für $\psi(t, \tau, z) = f(t, z)$ und $p = 1$:
Es gilt für $t \in t_0 + \mathbb{N}\tau \cap [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} u_\tau(t) &= u(t) + a_1(t)\tau + a_2(t)\tau^2 + \cdots + O(\tau^{1+k}), \\ u_{\tau/2}(t) &= u(t) + a_1(t)(\tau/2) + a_2(t)(\tau/2)^2 + \cdots + O(\tau^{p+k}). \end{aligned}$$

Also gilt für die Extrapolation

$$2u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) = u(t) - (1/2)a_2(t)\tau^2 + \cdots + O(\tau^{1+k}).$$