3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.1) Zu $\tau > 0$ und $t_n = t_0 + n\tau$ seien $u_0, \dots, u_{k-1}$ Näherungen für die Lösung der AWA (1.1) zu den Zeitpunkten $t_0, \dots, t_{k-1}$.
Ein lineares Mehrschrittverfahren definiert $u_k, \dots, u_n$ rekursiv durch

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} u_{n-i} = \tau \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i} \text{ für } n = k, \dots, N \text{ mit } f_j = f(t_j, u_j)\,.$$

(3.2) Für f sei eine L-Bedingung erfüllt, und sei $\tau L |\beta_k| < 1$. Dann konvergiert

$$u_n^j = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_{k-i} u_{n-i} + \tau \beta_k f(t_n, u_n^{j-1}) + \tau \sum_{i=1}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i}$$

für jedes $u_n^0 \in G$ gegen die Lösung des Mehrschrittverfahrens.

(3.3) Zu $u \in C^1$ definiere den *lokalen Diskretisierungsfehler*

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} u(t_{n-i}) - \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i} \dot{u}(t_{n-i})\,.$$

(3.4) Sei u analytisch. Dann gilt $g^n = \dfrac{1}{\tau} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} C_j \tau^j \Big(\frac{d}{dt}\Big)^j u(t_{n-k})$ mit $C_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i$ und

$$C_j = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{k} i^j \alpha_i - \frac{1}{(j-1)!} \sum_{i=0}^{k} i^{j-1} \beta_i \quad (j > 0).$$

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.5) Ein Verfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn $C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0,\ C_{p+1} \neq 0.$ C_{p+1} heißt *Fehlerkonstante*.

(3.6) Ein Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn der lokale Diskretisierungsfehler für Polynome vom Grad p verschwindet.

(3.7) Sei $\chi(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i = \prod\limits_{\nu=1}^{r} (\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ mit $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{r} m_\nu = k$.
Dann hat jede Lösung $(z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ der linearen Differenzengleichung $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} z_{n-i} = 0$ $(n \geq k)$ die Form $z_n = \sum\limits_{\nu=1}^{r} \sum\limits_{j=0}^{m_{\nu-1}} c_{\nu,j} \dfrac{n!}{(n-j)!} \lambda_\nu^n$. Die Koeffizienten $c_{\nu,j}$ sind durch $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ bestimmt.

(3.8) Zu einem Mehrschrittverfahren definiere das *charakteristische Polynom*

$$\chi(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i \,.$$

(3.9) Ein Mehrschrittverfahren heißt *stabil* (0-stabil), wenn für alle Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, und alle Nullstellen mit $|\lambda_i| = 1$ sind einfach.

(3.10) Wenn ein Mehrschrittverfahren nicht stabil ist, dann ist die diskrete Lösung für $\tau \to 0$ für fast alle Anfangswerte unbeschränkt.

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.11) Sei $A \in \mathbb{R}^{k,k}$ eine Matrix mit Spektralradius $\rho = \rho(A) = \max_{\mu \in \sigma(\mu)} |\mu|$, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = \rho$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann existiert eine symmetrisch positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit $|Az|_S \le \rho |z|_S$ für $z \in \mathbb{R}^k$. Dabei gilt $|z|_S = \sqrt{z^T S z}$.

(3.12) Wenn ein stabiles Mehrschrittverfahren konsistent von der Ordnung p ist, und wenn $u_1, \dots, u_{k-1}$ mit einem Verfahren der Ordnung $p-1$ berechnet werden gilt $|u(t_n) - u_n| = O(\tau^p)$.

(3.13) Für stabile Mehrschrittverfahren der Ordnung p gilt:

$p \le k+2$ für k gerade, $p \le k+1$ für k ungerade, $p \le k$ für $\beta_k = 0$ (explizit)

Prediktor mit explizitem Mehrschrittverfahren

$$u_n^0 = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_{n-1} u_{n-i} + \tau \sum_{i=1}^{k} \beta_{k-i} f_{n-i}, \text{ und für } j > 0$$

Korrektor mit implizitem Mehrschrittverfahren (j=1,...,J)

$$u_n^j = -\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_{n-i} u_{n-i} + \tau \hat{\beta}_k f\big(t_n, u_n^{j-1}\big) + \tau \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_{k-i} f_{n-i}$$

(3.14) Sei p^c die Ordnung des Korrektors und p^p die Ordnung des Prediktors. Dann ist $p = \min\{p^p + J, p^c\}$ die Ordnung des Prediktor-Korrektor-Verfahren.