5 Randwert-Aufgaben: Lineare Randwertaufgaben

(5.2) Zu $I=[a,b]$, $A\in C(I,\mathbb{R}^{M,M})$, $b\in C(I,\mathbb{R}^M)$, $B_a,B_b\in\mathbb{R}^{M,M}, g\in\mathbb{R}^M$ betrachte die allgemeine inhomogene lineare RWA $u'(x)=A(x)u(x)+b(x)$ für $x\in I$ und $B_a u(a)+B_b u(b)=g$.

(5.3) Sei $u^0\in C^1(I)$ Lösung der inhomogenen AWA $(u^0)'(x)=A(x)u^0(x)+b(x)$ mit $u^0(a)=0$, und $u^m\in C^1(I)$ seien Lösungen der homogenen AWA $(u^m)'(x)=A(x)u^m(x)$, $u^m(a)=e^m$ für $m=1,...,M$. Dann ist $U(x)=\big(u^1(x),\dots,u^M(x)\big)$ ein Fundamentalsystem, und jede Lösung von (5.2) hat die Form $u(x)=u^0(x)+\sum_{m=1}^M y_m u^m(x)$ mit $y\in\mathbb{R}^M$ als Lösung von $\big(B_a+B_bU(b)\big)y=g-B_bu^0(b)$. Also gilt: entweder, $Q:=B_a+B_bU(b)$ ist regulär (und damit (5.2) eindeutig lösbar), oder Q ist singulär, d. h. falls $Qy=g-B_bu^0(b)$ lösbar ist, ist die Lösung nicht eindeutig, und sonst existiert keine Lösung (Fredholmsche Alternative).

(5.4) Sei u_h^0 diskrete Lösung der AWA $(u^0)'=Au^0+b$ mit $u^0(a)=0$, und seien u_h^m diskrete Lösungen der AWA $(u^m)'=Au^m, u^m(a)=e^m$ für $m=1,\dots,M$. Sei $y_h\in\mathbb{R}^M$ Lösung von $Q_hy_h=g-B_bu_h^0(b)$ mit $Q_h=B_a+B_bU_h(b)$ und $U_h=(u_h^1,\dots,u_h^M)$, und sei $u_h=u_h^0+\sum_{m=1}^M y_{h,m}u_h^m$. Es gelte $|u^m(x_n)-u_h^m(x_n)|=O(h^p)$ für $m=0,\dots,m$, $x_n=a+nh$. Dann gilt: Wenn $Q=B_a+B_bU(b)$ regulär ist, dann existiert ein $h_0>0$, sodass Q_h für $h<h_0$ regulär ist, und es gilt für die Lösung der RWA $|u(x_n)-u_h(x_n)|=O(h^p)$.

5 Randwert-Aufgaben: Schieß-Verfahren

(5.5) Seien $I = [a,b]$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ und $g \in C(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ gegeben. Dann lautet die allgemeine RWA:
Bestimme $u \in C^1(I, \mathbb{R}^M)$ mit $u' = f(x,u)$ in $I = [a,b]$ und $g\big(u(a), u(b)\big) = 0$.

(5.6) Sei $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Dann ist die Lösung u^v der AWA $(u^v)'(x) = f(x, u^v(x))$ mit $u^v(a) = v$ nach v differenzierbar mit $J = D_v u^v \in C^1(I, \mathbb{R}^{M,M})$. J erfüllt die lineare Matrix - AWA

$$J'(x) = D_2 f\big(x, u^v(x)\big) J(x) \qquad J(a) = I_M$$

und es gilt $Je^k = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{1}{\delta}(u^{v+\delta e^k} - u^v)$.

Schieß-Verfahren für allgemeine RWA

S0) wähle Startwert $v \in \mathbb{R}^M$

S1) berechne Approximation u^v der AWA mit $(u^v)' = f(x, u^v)$, $\quad u^v(a) = v$
berechne $G(v) := g\big(v, u^v(b)\big)$
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation ΔG von $DG(v)$ spaltenweise:

$$\text{Für } \delta > 0 \text{ und } e^k \text{ setze } \Delta G(v) e^k = \frac{1}{\delta}\,\big(G(v + \delta e^k) - G(v)\big)$$

S3) berechne $v := v - \big(\Delta G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

5 Randwert-Aufgaben: Mehrzielmethode

S0) Wähle eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_R = b$.
Wähle Startwerte $v = (v^0, ..., v^R) \in \mathbb{R}^{M(R+1)}$.

S1) berechne Approximation u^r der AWA mit

$$(u^r)' = f(x, u^r), \quad u^v(x_{r-1}) = v^{r-1}\,.$$

berechne $G(v) := (G_r(v))_{r=0,...,R}$ mit $G_0(v) = g(v^0, v^R)$ und
$G_r(v) = u^r(x_r) - v^r$ für $r = 1, ..., R$.
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation $\Delta G(v)$ von $G'(v)$.

S3) berechne $v := v - \big(\Delta G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

(5.7) Für lineare RWA $u' = Au + f$ mit $B_a u(a) + B_b u(b) = g$ gilt:
Wenn die RWA eindeutig lösbar ist,
dann ist die Matrix $G'(v)$ regulär.

Für allgemeine RWA $u' = f(x, u)$ mit $g(u(a), u(b)) = 0$ gilt:
Wenn die RWA eine isolierte Lösung besitzt und f, g hinreichend glatt sind,
dann ist die die Matrix $G'(v)$ in einer Umgebung der Lösung regulär.

5 Randwert-Aufgaben: Differenzenverfahren

(5.8) Für $\partial_h u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+h) - u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \le \frac{1}{6}\, h^2\, \|u'''\|_\infty$.

(5.9) Sei $I = [a,b]$ ein Intervall, $p \in C^1(a,b)$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in C(a,b)$. Für $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ ist $Lu = -(pu')' + qu' + ru$ der Sturm-Liouville-Operator.

(5.9) Sei $N > 0$ und $h = \dfrac{b-a}{N+1}$, $x_n = a + nh$, $\Delta = \{x_0, \dots, x_{N+1}\}$.
Zu einer Gitterfunktion $u^h \colon \Delta \to \mathbb{R}^{N+2}$ betrachte die *Differenzengleichung* $L_h u^h = f^h$ mit

$$L_h u^h(x_n) = -\partial_{h/2}(p\partial_{h/2} u^h)(x_n) + q(x_n)\partial_h u^h(x_n) + r(x_n) u^h(x_n)\,, \qquad n = 1, \dots, N$$

und $u_0 = u_{N+1} = 0$. Setze $\|u^h\|_{\infty,\Delta} := \max\limits_{1\le n\le N} |u^h(x_n)|$.

(5.10) a) Ein Differenzenverfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn für die Interpolation $I_h u$ $\big(\text{mit } (I_h u)(x_n) = u(x_n)\big)$ der exakten Lösung u gilt:

$$\|L_h(I_h u) - f^h\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)\,.$$

b) Es heißt stabil, wenn $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\Delta} \le C$ unabhängig von $0 < h < h_0$.

(5.11) Das Differenzenverfahren (5.11) sei konsistent von der Ordnung p und stabil. Dann ist es konvergent, d.h. $\|u^h - u\|_{\infty,\Delta} = O(h^p)$ für $h \to 0$.

5 Randwert-Aufgaben

(5.12) Für $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gelte:

a) A ist stark diagonal-dominant, d.h.

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[n,k]| \le |A[n,n]|\,, \qquad n = 1,...,N\,,$$

und es existiert ein $j \in \{1,\dots,N\}$ mit $\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[j,k]| < |A[j,j]|$.

b) A ist irreduzibel, d.h. zu jedem Paar $j \neq n$ existiert ein Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ mit $A[j_1, j_0] \neq 0, ..., A[j_R, j_{R-1}] \neq 0$.

Dann gilt:

1) A ist regulär.

2) Sei $A[n,n] > 0$ für alle n. Dann ist A positiv definit.

3) Sei $A[n,n] > 0$ und $A[n,k] \le 0$ für $n \neq k$. Dann ist $A^{-1} \ge 0$ (elementweise).

Anwendung auf $L_h u^h(x_n) = \partial_{h/2}(p\partial_{h/2}u^h)(x_n) + r(x_n)u^h(x_n)$ für $p > 0$, $r \ge 0$:
Es gilt $L_h^{-1} f^h \ge 0$ für $f^h \ge 0$ und $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\Delta} \le \|L_h^{-1} e^h\|_{\infty,\Delta}$ mit $e^h \equiv 1$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

Sei $\hat{V} = \{\varphi \in C(I)\colon\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi$ stückweise differenzierbar $\}$.
Für $u, v \in \hat{V}$ definiere die Bilinearform $a(u,v) = \displaystyle\int_a^b (pu'v' + qu'v + ruv)\,dx$
und die Linearform $\ell(v) = \int_a^b fv\,dx$. Sei $\|v\| = (\int_a^b v^2\,dx)^{1/2}$.

(5.12) a) Es gilt die Poincaré-Ungleichung

$$\|v\| \le \frac{b-a}{2}\,\|v'\| \qquad \text{für alle } v \in \hat{V}\,.$$

b) $\ell(\cdot)$ ist stetig bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d. h. $|\ell(v)| \le C\|v'\|$ für $v \in \hat{V}$.
c) $a(\cdot,\cdot)$ ist stetig bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d. h.

$$|a(u,v)| \le C\,\|u'\|\,\|v'\| \qquad \text{für alle } v \in \hat{V}\,.$$

d) sei zusätzlich $\min p(x) \ge \rho > 0$ und $\rho + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \min(r - \frac{1}{2}q') > 0$.
Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch bzgl. $v \longmapsto \|v'\|$, d.h.

$$a(v,v) \ge c\|v'\|^2 \qquad \text{für alle } v \in \hat{V}\,.$$

(5.13) Wenn $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch ist, hat die Sturm-Liouville RWA eine eindeutige Lösung $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

(5.14) Sei $V_h \subset \hat{V}$ und sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$ der Variationsgleichung $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$.

(5.15) Sei $u \in C^2(I)$ Lösung der Sturm-Liouville RWA und sei $u_h \in V_h$ Lösung von (5.14). Dann gilt für den Fehler $e_h = u - u_h$ die
Galerkin-Orthogonalität $a(e_h, v_h) = 0$ für $v_h \in V_h$.

(5.16) Sei $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch.
Dann gilt für den Galerkin-Fehler $\|e_h'\| \leq \dfrac{C}{c} \inf\limits_{v_h \in V_h} \|u' - v_h'\|$.

(5.17) $a(\cdot,\cdot)$ sei symmetrisch und elliptisch auf $\hat{V}$.
Dann gilt für $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$ und $u \in \hat{V}$:

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in \hat{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in \hat{V}\ .$$

(5.18) Sei $V_h \subset \hat{V}$ der Raum der linearen Finiten Elemente mit der Gitterweite h.
Sei $I_h\colon \hat{V} \longrightarrow V_h$ die lineare Interpolation und sei $u \in C^2(I)$. Dann gilt:
a) $\|u - I_h u\| \leq h^2\, \|u''\|$
b) $\|(u - I_h u)'\| \leq h\, \|u''\|$
c) $\|u - I_h u\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^2\, \|u''\|_\infty$

(5.19) $a(\cdot,\cdot)$ sei elliptisch. Dann gilt für die Lösung $u \in C^2(I)$ der RWA $\|u''\| \leq C\|f\|$.

5 Randwert-Aufgaben: Variationsmethoden

(5.20) Unter der Voraussetzung von (5.16) gilt für die Galerkin-Lösung $u_h \in V_h$

a) $\|u' - u_h'\| \leq C\,h\|f\|$

b) $\|u - u_h\| \leq C\,h^2\,\|f\|$.

(5.21) Zu $-\varepsilon u'' + u' + u = f$ mit $u(a) = u(b) = 0$ betrachte

$$\int_a^b \left(\varepsilon u_h' v_h' + (u_h' + u_h)(v_h + \delta v_h')\right) dt = \int_a^b f(v_h + \delta v_h')\,dt \text{ für } v_h \in V_h.$$

Dann gilt für $\varepsilon \leq h$, $\delta = h$ und $\|v\|_\delta = \left(\varepsilon\,\|v'\|^2 + \delta\,\|v'\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2}$

$$\|u - u_h\|_\delta \leq C\,h^{3/2}\,\|\ddot{u}\|\ .$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

Betrachte die parabolische Gleichung

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t)\,, \qquad (x,t) \in (a,b) \times (0,T) \\
u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad x \in (a,b) \\
u(a,t) &= g_a(t)\,, \quad u(b,t) = g_b(t)\,, \qquad t \in (0,T]
\end{aligned}$$

Wähle $N, J > 0$, $h = (b-a)/(J+1)$, $\tau = T/N$, $x_j = a + jh$, $t_n = n\tau$.
Zu $\theta \in [0,1]$ bestimme u_j^n für $j = 1,...,J$ und $n = 1,...,N$ mit

$$\frac{1}{\tau}\Big(u_j^n - u_j^{n-1}\Big) = \frac{1-\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}\Big) + \frac{\theta}{h^2}\Big(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\Big)$$

mit Anfangs- und Randwerten

$$\begin{aligned}
u_j^0 &= u_0(x_j)\,, \qquad j = 1,...,J\,, \\
u_0^n &= g_a(t_n)\,, \quad u_{J+1}^n = g_b(t_n)\,, \qquad n = 1,...,N
\end{aligned}$$

Setze $u^n = (u_1^n, ..., u_J^n)$, $G = \mathrm{tridiag}(-1,2,-1)$, $A = I + \theta\alpha G$, $B = I - (1-\theta)\alpha G$
und $b^n = (\theta g_a(t_n) + (1-\theta)g_a(t_{n-1}), 0, ..., 0, \theta g_b(t_n) + (1-\theta)g_b(t_{n-1}))$.
Dann gilt

$$Au^n = Bu^{n-1} + b^n\,, \qquad n = 1,...,N\,.$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

(5.22) Sei $\theta \geq 1/2$ oder $\alpha < 1/(2-4\theta)$ falls $\theta < 1/2$. Dann gilt $\rho(A^{-1}B) < 1$, d.h. die numerische Lösung ist stabil.

(5.23) Für den lokalen Diskretisierungsfehler einer Lösung von $\partial_t u = \partial_x^2 u$

$$
\begin{aligned}
g_j^n \quad = \quad & \frac{1}{\tau}\Big(u(x_j,t_n) - u(x_j,t_{n-1})\Big) - \frac{\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)\Big) \\
& -\frac{1-\theta}{h^2}\Big(u(x_{j+1},t_{n-1}) - 2u(x_j,t_{n-1}) + u(x_{j-1},t_{n-1})\Big)
\end{aligned}
$$

gilt $|g_j^n| = O(\tau^\beta + h^2)$ mit $\beta = 2$ für $\theta = 1/2$ and $\beta = 1$ sonst.

(5.24) Aus Stabilität (5.22) und Konsistenz (5.23) folgt Konvergenz:

$$
\Big(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}|u_j^n - u(x_j,t_n)|^2\Big)^{1/2} = O(\tau^\beta + h^2).
$$

5 Anfangs-Randwert-Aufgaben

Sei $(f,g) = \int_a^b fg\,dx$ das $L_2(a,b)$-Skalarprodukt und $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch in

$$V = \{v \in C[a,b]\colon\ v(a) = v(b) = 0, v(t) = \int_0^t w(s)\,ds \text{ mit } w \in L_2(a,b)\}\,.$$

Bestimme $u\colon\ [0,T] \longrightarrow V$ mit $\partial_t u(t) \in L_2(a,b)$, $u(0) = u_0$ und

$$(\partial_t u(t), v) + a(u(t), v) = 0\,,\qquad v \in V\,.$$

Sei $V_h \subset V$ ein Finite-Elemente-Raum, und sei
$P_h\colon\ V \longrightarrow V_h$ mit $a(P_h w, v_h) = a(w, v_h)$ für $v_h \in V$ die *Galerkin-Projektion*.
Sei $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$ und setze $\partial^\tau u(t) = \frac{1}{\tau}(u(t) - u(t-\tau))$.
Bestimme $u_h^n \in V_h$ $(n = 0,\ldots,N)$ mit $u_h^0 = u_{h,0} \in V_h$ und

$$(\partial^\tau u_h^n, v_h) + a(u_h^n, v_h) = 0\,,\qquad v_h \in V_h\,.$$

(5.26) Es existiere eine eindeutige Lösung u der Anfangs-Randwertaufgabe mit $\partial_t\partial_x^2 u, \partial_t^2 u \in L_2((0,T)\times(a,b))$.
Es gelte $\partial_x^2 u_0 \in L_2(a,b)$, $\|u_0 - u_{0,h}\| \le C\,h^2\|\partial_x^2 u_0\|$, und
für alle $v \in V$ mit $\partial_x^2 v \in L_2(a,b)$ gelte $\|v - P_h v\| \le C\,h^2\|\partial_x^2 v\|$.
Dann gilt

$$\|u(t_n) - u_h^n\| \le C\,h^2\left(\|\partial_x^2 u_0\|_2 + \int_0^{t_n}\|\partial_t\partial_x^2 u(s)\|_2\,ds\right) + C\tau\int_0^{t_n}\|\partial_t^2 u(s)\|_2\,ds\,.$$