Numerische Mathematik II — Programmier-Übungsblatt 1

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1 **(Abgabe)**

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f(u(t))$ mit $f(u) = -\lambda\, u$, $\lambda \geq 0$ und Anfangswert $u(0) = u^0 = 1$. Die Differentialgleichung hat die Lösung $u(t) = \exp(-\lambda t)$. Betrachten Sie zur numerischen Approximation folgende Verfahren:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Explizites Euler-Verfahren :} & u^n = u^{n-1} + \tau f(u^{n-1}) \\
\text{Implizites Euler-Verfahren :} & u^n = u^{n-1} + \tau f(u^n) \\
\text{Explizite Mittelpunktsregel :} & u^n = u^{n-2} + 2\tau f(u^{n-1}) \\
 & u^1 = u^0 + \tau f(u^0). \\
\text{Implizite Mittelpunktsregel :} & u^n = u^{n-1} + \tau f\big(\tfrac{1}{2}(u^n + u^{n-1})\big) \\
\text{Implizite Trapezregel :} & u^n = u^{n-1} + \tfrac{\tau}{2}\big(f(u^n) + f(u^{n-1})\big)
\end{array}
$$

(a) Implementieren Sie für die Modellgleichung obige Verfahren in einer Matlab-Funktion. Übergabeparameter sollen der Anfangswert, die Anzahl der Zeitschritte $N \in \mathbb{N}$, die Zeitschrittweite $\tau > 0$ und λ sein.

(b) Überprüfen Sie die Konvergenzordnung experimentell indem Sie zu einem festen Zeitpunkt die numerische Approximation mit der exakten Lösung vergleichen. Wählen Sie dazu unterschiedliche Schrittweiten τ und erstellen Sie eine Tabelle für die verschiedenen Schrittweiten. Welche Konvergenzordnung bzgl. τ beobachten Sie für die einzelnen Verfahren?

(c) Wie verhalten sich die numerischen Approximationen qualitativ bei fester Schrittweite τ in Abhängigkeit von λ?

Aufgabe 2 (Phasenportraits) **(keine Abgabe)**

Betrachten Sie ein System autonomer (d.h. die rechte Seite hängt nicht explizit von t ab) gewöhnlicher Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(u_1(t), u_2(t)) \\ f_2(u_1(t), u_2(t)) \end{bmatrix} \qquad \text{für} \quad t \in [0, T]\,.$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $u : [0, T] \to \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie folgende Funktionen:

- (Gedämpfter) Harmonischer Oszillator: $f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -cu_2 - \omega^2 u_1 \end{bmatrix}$.

  Interpretation: Position u_1 und (Winkel-) Geschwindigkeit u_2.
  Parameter: Kreisfrequenz $\omega > 0$ und Dämpfung $c \geq 0$.

- (Gedämpftes) Pendel: $f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -cu_2 - \omega^2 \sin u_1 \end{bmatrix}$

  Interpretation: Position u_1 und (Winkel-) Geschwindigkeit u_2.
  Parameter: Kreisfrequenz $\omega > 0$ und Dämpfung $c \geq 0$.

- Räuber-Beute-Modell: $f(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} u_1(\alpha - \beta u_2) \\ -u_2(\gamma - \delta u_1) \end{bmatrix}$.

  Interpretation: Beute-Population u_1 und Räuber-Population u_2.
  Parameter: Reproduktionsrate der Beute $\alpha > 0$, Sterberate der Beute $\beta > 0$, Sterberate des Räubers $\gamma > 0$, Reproduktionsrate des Räubers $\delta > 0$.

(a) Zeichnen Sie das Phasenportrait der ODE, d.h. zeichnen Sie das Vektorfeld f in der u_1-u_2-Ebene. Dazu können Sie die Matlab-Befehle `meshgrid` und `quiver` benutzen.

(b) Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren $u^n = u^{n-1} + \tau f(u^{n-1})$ um die obigen Probleme numerisch zu approximieren. Zeichnen Sie die gewonnenen Approximationen für verschiedene Anfangswerte in das Phasenportrait, d.h. die Verbindung der Punkte (u_1^n, u_2^n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ in der u_1-u_2-Ebene.

Experimentieren Sie auch mit den Problem-Parametern.

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 5. November** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Das Rechnerpraktikum findet immer **donnerstags, von 13.30 - 16.30 Uhr im B-Pool** des Rechenzentrums statt.

Service/Material:

Unter http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.