Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II **Programmier-Übungsblatt 4**
Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 5 (Schieß-Verfahren für Randwertaufgaben) **(Abgabe)**
Sei $I = (0, 1)$ und betrachten Sie zu einer Funktion $F \in C(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ die nichtlineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung mit homogenen Randbedingungen

$$\text{(RWA)} \qquad u''(x) = F(t, u(x), u'(x))\,, \qquad u(0) = u(1) = 0\,.$$

Falls $u'(0) = \vartheta$ bekannt wäre, so ließe sich die Lösung von (RWA) durch die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\text{(AWA)} \qquad u''(x) = F(x, u(x), u'(x))\,, \qquad u(0) = 0\,, \quad u'(0) = \vartheta\,,$$

charakterisieren. Die Lösung von (AWA) sei mit u_ϑ bezeichnet. Wir definieren die Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $H(\vartheta) = u_\vartheta(1)$ und somit ist u_ϑ eine Lösung von (RWA) falls $H(\vartheta) = 0$ gilt. Diese nichtlineare Gleichung soll nun mit dem Newton-Verfahren gelöst werden, d.h. ausgehend von $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ wird ϑ_n für $n \geq 1$ durch

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} - H'(\vartheta_{n-1})^{-1} H(\vartheta_{n-1})$$

bestimmt. Dazu wird die Ableitung von H benötigt. Diese ist durch $H'(\vartheta) = w_\vartheta(1)$ gegeben, wobei w_ϑ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\text{(AWA2)} \qquad \begin{aligned} &w''(x) = D_2F\big(x, u_\vartheta(x), u'_\vartheta(x)\big)w(x) + D_3F\big(x, u_\vartheta(x), u'_\vartheta(x)\big)w'(x)\,,\\ &w(0) = 0\,, \quad w'(0) = 1\,. \end{aligned}$$

ist, d.h. die Ableitung von H hängt auch von u_ϑ ab.

Im Folgenden habe die Funktion F die Gestalt (Duffing-Gleichung)

$$F(x, u, v) = -3u + \lambda(3u - u^3) - f(x)\,,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in C(I, \mathbb{R})$ gegeben seien.

(a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren, indem Sie die gekoppelten Anfangswertprobleme (AWA) und (AWA2) simultan lösen. Formulieren Sie dafür die beiden Anfangswertaufgaben in ein System erster Ordnung um und verwenden Sie das (eingebettete) klassische Runge-Kutta-Verfahren von Programmier-Übungsblatt 2 (siehe Homepage). Welche Konvergenzordnung des Newton-Verfahrens beobachten Sie?

(b) Ersetzen Sie im Newton-Verfahren die Ableitung $H'(\vartheta)$ durch eine numerische Approximation (verwenden Sie beispielsweise den Vorwärts-Differenzenquotienten, d.h. $H'(\vartheta) \approx \frac{1}{h}(H(\vartheta + h) - H(\vartheta))$ für ein geeignetes $h \neq 0$). In diesem Fall muss in jedem Newton-Schritt das Anfangswertproblem (AWA) zweimal gelöst werden. Welche Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens beobachten Sie?

(c) Bestimmen Sie zu den von Ihnen gewählten Parametern λ und f möglichst viele Lösungen der Duffing-Gleichung. Geben Sie diese auch graphisch aus.

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 28. Januar 2010** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Das Rechnerpraktikum findet immer **donnerstags, von 13.30 - 16.30 Uhr im B-Pool** des Rechenzentrums statt.

Service/Material:

Unter http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.