Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Programmier-Übungsblatt 5

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 6 (Finite Differenzen/Elemente für Randwertaufgaben) **(Abgabe)**

Betrachten Sie auf $I = (0, 1)$ zu $\varepsilon > 0$ die Randwertaufgabe $Lu = f$ mit

$$(Lu)(x) = -\varepsilon u''(x) + u'(x)\,, \qquad f(x) = 1\,, \qquad u(0) = u(1) = 0\,,$$

sowie die zugehörige schwache Formulierung: Bestimme $u \in V = \{u \in C[a, b] : u(0) = u(1) = 0\,,\ u$ stückweise differenzierbar$\}$, sodass $a(u, \phi) = \ell(\phi)$ für alle $\phi \in V$. Dabei ist

$$a(u, \phi) = \int_I \varepsilon u'(x)\phi'(x)\,dx + \int_I u'(x)\phi(x)\,dx\,, \qquad \ell(\phi) = \int_I f(x)\phi(x)\,dx$$

Die analytische Lösung ist $u(x) = x - \dfrac{\exp((x-1)/\varepsilon) - \exp(-1/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)}$.

Auf I sei zur Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$ das Gitter $x_k = kh$, $k = 0, \dots, N+1$ gegeben. Auf diesem Gitter soll die Lösung der RWA mittels finiten Differenzen (FD) bzw. finiten Elementen (FE) approximiert werden. Für die FD-Methode sollen dabei folgende Diskretisierungen zur Approximation $u_k \approx u(x_k)$ benutzt werden:

(1) FD mit zentralen Differenzquotienten, d.h.

$$L_h u_k = \frac{\varepsilon}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) + \frac{1}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1})$$

(2) FD mit Upwind-Diskretisierung, d.h.

$$L_h u_k = \frac{\varepsilon}{h^2}(-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) + \frac{1}{h}(u_k - u_{k-1})$$

Für die FE-Diskretisierung soll der endlich dimensionale Ansatzraum $V_h \subset V$,

$$V_h = \{u \in C[0, 1] : u(0) = u(1) = 0 \text{ und } u\big|_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ linear für } k = 1, \dots, N+1\}\,,$$

benutzt werden. Es gilt $\dim(V_h) = N$ und die N Basisfunktionen $\{\phi_k^h\}_{k=1,\dots,N}$ sind durch $\phi_k^h(x) = \max\{0, 1 - \frac{|x - x_k|}{h}\}$ gegeben (Hutfunktionen). Zudem seien die Matrizen $B_h, C_h \in \mathbb{R}^{N,N}$ definiert durch $(B_h)_{jk} = \int_I (\phi_j^h)'(x)(\phi_k^h)'(x)\,dx$ und $(C_h)_{jk} = \int_I (\phi_j^h)'(x)\phi_k^h(x)\,dx$. Auf dem äquidistanten Gitter gilt dann

$$(B_h)_{jk} = \begin{cases} 2/h & , k = j\,, \\ -1/h & , k = j \pm 1 \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \qquad (C_h)_{jk} = \begin{cases} 1/2 & , k = j+1\,, \\ -1/2 & , k = j-1 \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

Zur Approximation der RWA sollen dann folgende Diskretisierungen benutzt werden:

(3) Lineare FE: Bestimme $u^h \in V_h$, $u^h = \sum_{k=1}^N \underline{u}_k \phi_k^h$, sodass für $k = 1, \dots, N$ die Bedingungen $a(u^h, \phi_k^h) = \ell(\phi_k^h)$ erfüllt sind. Dies ist äquivalent zum LGS $A_h \underline{u} = f^h$ für die Koeffizienten $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ mit $A_h = \varepsilon B_h + C_h$ und $f_k^h = \ell(\phi_k^h)$.

(4) Lineare FE mit Streamline Diffusion (SD): Es wird das erweiterte System $a_{\mathsf{SD}}(u^h, \phi_k^h) = \ell_{\mathsf{SD}}(\phi_k^h)$ für $k = 1, \dots, N$ gelöst. Dabei ist

$$a_{\mathsf{SD}}(u, \phi) = a(u, \phi) + \frac{h}{2}\int_I u'(x)\phi'(x)\,dx\,,$$
$$\ell_{\mathsf{SD}}(\phi) = \ell(\phi) + \frac{h}{2}\int_I f(x)\phi'(x)\,dx\,.$$

Dies führt auf das LGS $A_h \underline{u} = f^h$ mit $A_h = (\varepsilon + \frac{h}{2})B_h + C_h$ und $f_k^h = \ell_{\mathsf{SD}}(\phi_k^h)$.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

(a) Laden Sie sich von der Homepage die Vorlage (inkl. Lösung für (1)) herunter, und implementieren Sie anschließend die Varianten (2)-(4), indem Sie das jeweilige LGS aufstellen und lösen.

(b) Variieren Sie die Parameter ε und die Schrittweite h. Welche qualitativen Unterschiede bemerken Sie zwischen (1) und (2), bzw. zwischen (3) und (4)?

(c) Berechnen Sie für (1) und (2) den Fehler $\max_{k=1,\dots,N} |u_k - u(x_k)|$, wobei u die exakte Lösung ist.

(d) Berechnen Sie für (3) und (4) jeweils den Fehler $\|u^h - u\|$ und $\|(u^h - u)'\|$, wobei $\|v\| = \left(\int_I |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ die L^2-Norm ist. Überlegen Sie sich ein geeignetes Verfahren um das Integral zu approximieren.

(e) Bestimmen Sie jeweilige Konvergenzordnung in (c) und (d).

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 11. Februar 2010** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Das Rechnerpraktikum findet immer **donnerstags, von 13.30 - 16.30 Uhr im B-Pool** des Rechenzentrums statt.

Service/Material:

Unter http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.