Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

1. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 20. und 25. 10. 2011

Aufgabe 1:

(a) Geben Sie zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)} \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$y_1(t) \equiv 1 \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sqrt{1-t^2}$$

zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\frac{\sqrt{1-y(t)^2}}{y(t)} \quad , \quad t \in [0,1) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

sind.

Aufgabe 2: (Modellierung chemischer Reaktionskinetik)
Gegeben sei ein abgeschlossenes System mit n Substanzen $S_1, \ldots, S_n$ und den zugehörigen Konzentrationen $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ zur Zeit t. Die n Substanzen sollen durch m chemische Reaktionen in gegenseitige Wechselwirkung treten. Dies lässt sich durch das Reaktionsschema

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} S_i \quad \xrightarrow{k_j} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} S_i \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

beschreiben. Dabei bezeichnen die ganzen positiven Zahlen α_{ij}, β_{ij} die Anteile der Substanzen (stöchometrische Konstanten) und die positiven reellen Parameter k_j die Reaktionsgeschwindigkeiten.
Als Differentialgleichung für die Konzentration c_i von Substanz S_i hat man dann

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^{m} \left((\beta_{ij} - \alpha_{ij}) k_j \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{lj}!} c_l^{\alpha_{lj}} \right) .$$

(a) Gegeben sei das Reaktionsschema:

$$O_3 \xrightarrow{k_1} O_2 + O$$
$$O_2 + O \xrightarrow{k_2} O_3.$$

Formulieren Sie in Abhängigkeit von k_1 und k_2 das zugehörige Differentialgleichungssystem.

(b) Sei $c_1(t)$ die Konzentration von O, $c_2(t)$ die Konzentration von O_2 und $c_3(t)$ die Konzentration von O_3. Zeigen Sie:

$$c_1(0) + 2c_2(0) + 3c_3(0) = c_1(t) + 2c_2(t) + 3c_3(t) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(c) Zeigen Sie, dass für positive Startwerte $(c_1(0), c_2(0), c_3(0) > 0)$ und $c_1(0) = c_2(0)$ die Lösung des Systems für alle $t \geq 0$ nicht negativ werden kann.

(d) Ein Laborant verwendet in einem Experiment die Konzentrationen $c_1(0) = 5$ und $c_2(0) = 4$. Die Reaktionsgeschwindigkeiten sind $k_1 = 2$ und $k_2 = 3$.
Das Experiment weist scheinbar keine Reaktion auf. Wie war die Konzentration $c_3(0)$ gewählt?

Aufgabe 3:

(a) Beweisen Sie:
Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Dann besitzt die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t, y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$$

die Lösung

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, y(s)) ds.$$

Diese Gleichung wird als *Variation-der-Konstanten-Formel* bezeichnet.

(b) Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

(i) $\dot{y}(t) = -y(t) + 1 \quad , \quad y(0) = 0,$

(ii) $\dot{y}(t) = -y(t) + t \quad , \quad y(0) = 0.$

In den Lösungsdarstellungen sollen keine Integrale vorkommen.