Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

12. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 19. und 24. 1. 2012

Aufgabe 1: (Shortley-Weller-Schema)

(a) Leiten Sie ein Differenzenschema her, welches die zweite Ableitung einer eindimensionalen Funktion über einer nicht-äquidistanten Diskretisierung approximiert. Was gilt für den Fehler der Approximation, wenn der maximale Gitterabstand $h_{\max}$ ist?

(b) Bei Gebieten mit komplexen Geometrien ist die Diskretisierung zu modifizieren, um den Rand aufzulösen. Hierfür werden der Diskretisierung *Randpunkte* hinzugefügt und das Differenzenschema im Bereich dieser Punkte abgeändert. Das resultierende Differenzenverfahren wird als *Shortley-Weller-Schema* bezeichnet. Diskutieren Sie, wie bei einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit krummlinigen Rand die Diskretisierung ergänzt, beziehungsweise das Differenzenschema abgeändert werden muss, um die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Bedingungen zu lösen.

Aufgabe 2: (Diskretisierung eines Neumann Randwertproblems)
Betrachten Sie das Neumann Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ \partial_n u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$.
Dieses Problem kann mit dem "Fünf-Punkte-Stern" in den inneren Diskretisierungspunkten, also in Punkten aus Ω_h, und mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten in den Punkten auf dem reduzierten Rand

$$\Gamma_h' = \Gamma_h \setminus \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

diskretisiert werden, d.h.

$$\partial_n^- u_h := \frac{1}{h}\big(u_h(x) - u_h(x - hn)\big) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_h'.$$

Bestimmen Sie die Matrix A_h des linearen Gleichungssystems

$$A_h v_h = b_h,$$

das wir durch diese Diskretisierung erhalten.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)
Schreiben Sie ein Programm, das das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei

$$f(x_1, x_2) = \cos(\pi x_1)(\pi^2 x_2(x_2 - 1) - 2)$$

und

$$\begin{aligned} g(0, x_2) &= x_2(x_2 - 1), \\ g(1, x_2) &= -x_2(x_2 - 1), \\ g(x_1, 0) = g(x_1, 1) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Methode der finiten Differenzen löst. Verwenden Sie den “Fünf-Punkte-Stern” zur Approximation des Laplace-Operators und erstellen Sie einen Fehlerplot zu den Schrittweiten

$$h = 1/10, 1/25, 1/50, 1/100.$$

Hinweis: Die exakte Lösung dieses Randwertproblems lautet

$$u(x_1, x_2) = \cos(\pi x_1) x_2(x_2 - 1).$$