

## Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

### 14. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 2. und 7. 2. 2012

#### Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

für  $F, G \in C^2(\mathbb{R})$  eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x)$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$$

eine Lösung von

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

$$\partial_t u(0, x) = v_0(x)$$

ist.

#### Aufgabe 2:

Weisen Sie nach, dass jede symmetrisch positiv definite, tridiagonale Matrix  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Zerlegung der Form

$$M = LDL^T$$

besitzt mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{d-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3:** (Programmieraufgabe: Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung)  
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall  $(0, \pi)$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) \quad \forall t > 0, x \in (0, \pi) \quad (1a)$$

$$u(0, x) = \sin(x) - \sin(2x) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad (1b)$$

$$u(t, \pi) = u(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (1c)$$

Lösen Sie die partielle Differentialgleichung unter Verwendung der vertikalen Linienmethode numerisch. Verwenden Sie zur Raumdiskretisierung zentrale Differenzen mit  $\Delta x$  als Gitterweite und lösen Sie die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}(t) = A_{\Delta x} \tilde{u}(t) + b_{\Delta x}$$

mit Schrittweite  $h = \frac{t_{end}}{N}$  durch

(a) die Trapezregel (Crank-Nicolson-Verfahren)

(b) das explizite Euler-Verfahren

und erstellen Sie für beide Verfahren Fehlerplots. Plotten Sie den Fehler aus Teil (a) in Abhängigkeit der Schrittweiten

$$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$$

zu der festen Gitterweite  $\Delta x = \pi/1000$ , sowie den Fehler in Abhängigkeit der Gitterweiten

$$\Delta x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{1000}$$

zu der festen Schrittweite  $h = 1/1000$ . Betrachten Sie für Teil (b) den Fehler in Abhängigkeit der Zeitschrittweiten

$$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$$

zu der festen Gitterweite  $\Delta x = \pi/10$ .

Hinweis: Die exakte Lösung des Anfangs-Randwertproblems erhalten Sie mittels Fouriermethoden (vergleiche mit Kapitel 9.1 der Vorlesung).