Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

4. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 10. und 15. 11. 2011

Aufgabe 1:
Sei $f : [t_0, t_{\text{end}}] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, zudem erfülle f die einseitige Lipschitz-Bedingung mit $\ell = 0$, also

$$\langle f(t,u) - f(t,v), u - v\rangle \;\leq\; 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d\ ,\ \forall t \in [t_0, t_{\text{end}}].$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall der globale Fehler des impliziten Euler-Verfahrens die Abschätzung

$$\max_{n=0,\ldots,N} \|y_n - y(t_n)\| \;\leq\; \frac{1}{2}(t_{\text{end}} - t_0)h \max_{t\in[t_0,t_{\text{end}}]} \|\ddot{y}(t)\|$$

erfüllt.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren mit Stufenzahl s und Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array},$$

welches die Ordnungsbedingungen

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i \quad \forall i = 1, \ldots, s$$

erfüllt, invariant gegen Autonomisierung ist.
Bemerkung: Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt invariant gegen Autonomisierung, falls seine Anwendung auf

$$\dot{y}(t) = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad , \quad t \geq t_0$$

und auf

$$\dot{u}(t) = F(u) \quad , \quad u(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \geq t_0$$

mit

$$u(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(u) = \begin{pmatrix} f(t,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

dieselben Approximationen liefert, also $u_n = \begin{pmatrix} y_n \\ t_n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:

(a) Weisen Sie nach, dass die folgenden Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzen:

(i) Mittelpunktsregel,

(ii) Trapezregel,

(iii) Heun,

(iv) Runge.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Kutta mindestens die Konsistenzordnung 3 besitzt.

(c) Bestimmen Sie alle expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & a_{21} & & \\ 2/3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

mit der Ordnung 3.