zur Index-Transformation

(Nachtrag zur Aufgabe 3 der 6. Übung vom 29.11.)

$$s_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)} .$$ $\boxed{\text{Frage: } \lim_{n\to\infty} s_n = ?}$

Durch Partialbruchzerlegung: $\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2} = \frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)}$

$$\Rightarrow s_n = \underbrace{2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-1}}_{\overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}}} - 3\underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}}_{\overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}}}$$

(*) hier findet eine Index-verschiebung statt

$$= \underbrace{2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1}} \underbrace{-3 - \frac{3}{2} - 3\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k}}$$

$$\left[2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} = 0 \right]$$

$$= \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2}$$

Also : $\boxed{s_n = \frac{3}{n-1} + \frac{2}{n} - 4}$

und $\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = -4}$

d.h. die Reihe $\left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)} \right)$ konvergiert

und ihr Reihenwert (Grenzwert) ist

$$\boxed{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4-5k}{k(k-1)(k-2)} = -4}$$