

Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko
M.Sc. S. Geninska

11	12	13	14	15	Σ

Karlsruhe, den 21.04.2008

Matrikel-Nr.:

Matrikel-Nr.:

3. Übungsblatt

zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 11: Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x-2) dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2} .$$

Aufgabe 12: Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$:

$$\int \frac{2}{\tan(\frac{x}{2}) + \cos(x) - \sin(x)} dx.$$

Aufgabe 13: Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_k(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{m=0}^k \frac{x^{2m+1}}{2^{2m}(m!)^2}, \quad x \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge monoton steigend ist: $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $x > 0$.

(b) Benutzen Sie $\int_0^\infty x^{2m+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2^m m!$ um zu zeigen, dass es eine von k unabhängige positive Zahl M gibt mit $\int_0^\infty f_k(x) dx < M$.

(c) Zeigen Sie mit dem Satz von Beppo Levi, dass $\int_0^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \sqrt{e}$.

Aufgabe 14: Zeigen Sie,

(a) dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx$ existiert für $\alpha > -2$, aber

(b) es existiert nicht für $\alpha = -2$, d.h. $\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx = \infty$.

Hinweis: $x^\alpha = x^{\alpha+2} \frac{1}{x^2}$ und $(\cos(x^{-1}))' = \sin(x^{-1})x^{-2}$.

Aufgabe 15: Ein Löschwasserteich wird über vier Zuleitungen gespeist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beinhaltet der Teich 100 Liter Wasser. Danach fließt über das erste Rohr eine Wassermenge von $\frac{\ln 2}{2t}$ Litern pro Sekunde [l/sec] zu (oder ab), über das zweite Rohr fließen $9te^{-3t} + \frac{2}{1+t^2}$ l/sec. Im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$ fließen über das dritte Rohr $\frac{-1}{4\sqrt{t}}$ l/sec. Die letzte Zuleitung ist erst ab $t \geq c$ aktiv mit $\frac{1}{t^2}$ l/sec. Bestimmen Sie das Wasservolumen im Teich für $t \rightarrow \infty$.

Abgabetermin: Dienstag, den 6.05.2008, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

2. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T5: Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 3x + 18}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

Aufgabe T6: Finden Sie die Stammfunktion mit geeigneter Substitution:

$$\int \frac{5e^{3x} + e^{2x} + 3e^x + 1}{e^{3x} + e^x} dx.$$

Aufgabe T7: Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$

(b) $\int_2^{\infty} \frac{x+2}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx.$

Aufgabe T8: Beweisen Sie,

(a) dass das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$$

existiert, wenn $\alpha > 1$ gilt und

(b) es existiert nicht für $\alpha = 1$, d.h. $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A (x \ln(x))^{-1} dx = \infty$.