

36	37	38	39	40	Σ

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 36: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$u'''(x) - 2u''(x) + u'(x) = 1 + x^2 + e^x, \quad x > 0.$$

Aufgabe 37: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 1 + x^2, \quad x > 0.$$

Aufgabe 38: Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 1 - x + y(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

soll mit dem Euler-Verfahren numerisch gelöst werden. Ziel ist es, zu zeigen, dass die numerische Lösung für $h \rightarrow 0$ in jedem Gitterpunkt gegen die exakte Lösung konvergiert.

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems.

(b) Mit y_k bezeichnen wir die Approximation des Euler-Verfahrens am Punkt $x_k = x_0 + kh$. Zeigen Sie, dass

$$y_k = (1 + h)^k (y_0 - x_0) + x_k.$$

(c) Wir wählen $\hat{x} > x_0$ beliebig und setzen die Schrittweite $h = (\hat{x} - x_0)/k$ für $k \in \mathbb{N}$. Die Approximation des Eulerverfahrens am Punkt $x_k = \hat{x}$ ist dann y_k . Zeigen Sie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y(\hat{x}).$$

Sie können benutzen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + a/k)^k = \exp(a)$.

Aufgabe 39: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$,

(a) indem Sie für einige x - bzw. y -Werte die Schnittkurven mit den Ebenen $x = x_0, x_1, \dots$ bzw. $y = y_0, y_1, \dots$ bestimmen und skizzieren,

(b) indem Sie einige Höhenlinien $z = c_0, c_1, \dots$ bestimmen und skizzieren,

(c) indem Sie beachten, dass es sich um eine Rotationsfläche handelt, d.h. die Fläche entsteht durch Rotation einer Kurve um eine Achse.

Aufgabe 40: Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x y$, und $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \ln(t)$.

(a) Bestimmen Sie die Höhenlinien von f .

(b) Skizzieren Sie den Graphen von g .

(c) Bestimmen Sie die Definitions- und Wertebereich von $h(x, y) := g(f(x, y))$.

(d) Begründen Sie, warum die Verkettung $f(g(t))$ sinnlos ist.

7. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T25: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y''(x) - y(x) = x$, (b) $y''(x) - y(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$.

Hinweis: Die Funktion e^x/x ist nicht geschlossen integrierbar.

Aufgabe T26: Weisen Sie den vorgegebenen Differentialgleichungen (a)-(h) mögliche Lösungsansätze zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- | | |
|---|--|
| (a) $y'(x) = c(x)$ | (e) $a_3x^3y'''(x) + a_1xy'(x) = 0$ |
| (b) $-6x^2y''(x) + 15xy'(x) - 15y(x) = 0$ | (f) $y(x) = a_1y'(x) + a_2y''(x) + b(x)$ |
| (c) $y(x) = a_1y'(x) + a_2y''(x)$ | (g) $x^2y''(x) - 2y(x) = x$ |
| (d) $y(x) = y'(x)$ | (h) $y'(x) = xy^2(x)$. |

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Integrieren								
Separation								
Potenzreihenansatz								
Variation der Konstanten								
Ansatz vom Typ der rechten Seite								
Exponentialansatz								
Potenzansatz								

Tabelle 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen und ihre Lösungsansätze

Aufgabe T27: Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{t}$. Bestimmen Sie $f(g(x)), g(f(x))$ und deren Definitions- und Wertebereiche.

Aufgabe T28: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$. Bestimmen Sie

- (a) die Höhenlinien von f ,
- (b) die Schnittkurven mit den Ebenen $x = x_0$, bzw. $y = y_0$, mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$,
- (c) die Schnittkurven mit den Ebenen $x + y = 0$ und $x - y = 0$. Wie sieht der Graph von $f(g(x))$ mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (x, x)$ aus?