| Gruppe |
|---|

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko
M.Sc. S. Geninska

| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Karlsruhe, den 9.6.2008

Matrikel-Nr.: ..................

Matrikel-Nr.: ..................

# 9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik I für biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe 41:** Gegeben seien die 3 Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A$ der linearen Abbildung $\Phi$ mit $\Phi(e_1) = b_1,\ \Phi(e_2) = b_2,\ \Phi(e_3) = b_3$, wobei $e_j$ den $j$-ten Koordinateneinheitsvektor bezeichne. Gegeben seien ferner die Vektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung $\Psi : x \mapsto Bx$ gegeben ist, mit $Bc_j = e_j$, $j = 1, 2, 3$. Zeigen Sie auch, dass für die lineare Abbildung $\Lambda : x \mapsto (AB)x$ gilt: $\Lambda c_j = b_j$, $j = 1, 2, 3$.

**Aufgabe 42:** Leichtmatrose Hein Blöd erhält von Käptn Blaubär für 3 mal Küchendienst (K) und einmal Deck schrubben (S) einen Euro (E) und einen Purpurpudding (P). Für einmal Deck schrubben und vier Angelruten (R) erhält er ebenfalls einen Purpurpudding. Für zwei Angelruten und vier gefangene Fische (F) kann er sich in der Hafenkneipe eine Bärenlimo (L) gönnen. Außerdem erzählt ihm der Käptn für die Gegenleistung von $\alpha$ Fischen und einem Küchendienst eine seiner irren Seemannsgeschichten (G). Hierbei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter, der von der Laune des Käptns abhängt. Stellen Sie zunächst die Abbildungsmatrix $A_\alpha$ auf, die die lineare Abbildung $(E, P, L, G) \mapsto (K, S, R, F)$ beschreibt. Für welche $\alpha$ ist diese Matrix invertierbar? Berechnen Sie für alle solche $\alpha$ die inverse Matrix und erläutern Sie deren Bedeutung im Hinblick auf Küchendienste, Deck schrubben, Angelruten und Fische.

**Aufgabe 43:** Gegeben seien die Unterräume $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 + x_3 = 0\}$ und $F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$.

(a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrizen $A$ und $B$ der Spiegelungen an $E$ und $F$.

(b) Welcher Drehung und um welche Achse entspricht die Abbildungsmatrix des Produkts $AB$?

**Aufgabe 44:** Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{(a) } D = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{7} & 2 & \pi \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b) } D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{(c) } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Aufgabe 45:** Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -t & -1 \\ -2 & t-1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS $A_t x = 0$ nur trivial lösbar? Hinweis: Nutzen Sie die Determinante!

**Abgabetermin:** Dienstag, den 17.06.2008, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

# 8. Tutorium
# zur Vorlesung Höhere Mathematik I für
# biw/ciw/mach/mage/vt

**Aufgabe T33:** Gegeben seien die 3 Vektoren $b^{(1)} = (1,3,1)^\top$, $b^{(2)} = (-2,2,1)^\top$, $b^{(3)} = (1,-4,1)^\top$ des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A$ der linearen Abbildung $\Phi$ mit $\Phi(e^{(1)}) = b^{(1)}$, $\Phi(e^{(2)}) = b^{(2)}$, $\Phi(e^{(3)}) = b^{(3)}$, wobei $e^{(j)}$ der $j$-te Koordinateneinheitsvektor ist.

Gegeben seien ferner die Vektoren $c^{(1)} = (1,-3,4)^\top$, $c^{(2)} = (-1,4,-5)^\top$, $c^{(3)} = (0,-2,3)^\top$. Zeigen Sie, dass durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung $\Psi : x \mapsto Bx$ gegeben ist, mit $Bc^{(j)} = e^{(j)}$, $j = 1,2,3$.

**Aufgabe T34:** Berechnen Sie die Matrixprodukte $AB^*$, $BC^\top$ und $C^\top BA^\top$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \\ 3i & 3 & 3i \\ 0 & 4i & 4 \\ 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe T35:** Berechnen Sie die Determinante der Matrix $C := (AB)^{-1}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe T36:** Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha - 1 & -\alpha + 3 \\ 0 & \alpha + 3 & -4 \\ 0 & 2 & \alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha$ besitzt das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit $b = (9,4,-2)^\top$ eine Lösung?

**Tutorien:** Dienstag, den 10.06.2008, bis Donnerstag, den 12.06.2008.