Gruppe

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T. Arens
Dipl.-Math.techn. A. Schkarbanenko
M.Sc. S. Geninska

51	52	53	54	55	$\sum$

Karlsruhe, den 17.06.2008

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 51: (a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und das Differential der skalaren Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1) x_2 \cos(x_3).$$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich der vektorwertigen Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad = \begin{pmatrix} \sin(x_1) + \ln(1 - x_2^2) \\ e^{-x_2^2} \\ \cosh(x_1 x_3) \end{pmatrix}$$

an und berechnen Sie die Jacobimatrix f'.

Aufgabe 52: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x, y) = (x^2 - 2y^2) e^{x^2+y^2}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g(t) = f(\sin(t), \cos(t))$ mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel und bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g, d.h. alle $t \in \mathbb{R}$ für die $g'(t) = 0$ gilt.

(b) Geben Sie einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und eine Richtung a an, so dass die Richtungsableitung von f am Punkt x_0 in Richtung a verschwindet.

Aufgabe 53: Gegeben ist die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos x_2 \cos x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Berechnem Sie den Gradienten ∇f und die Hessematrix $H_f(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{i,j=1,2,3}$.

Aufgabe 54:

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^{x_1} \tan(t) \, \exp(x_2 \cos t) \, dt\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $g(s) = f(s, \cos s)$ an der Stelle $s = \pi/4$.

Aufgabe 55: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie das Differential df im Punkt $p_0 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und geben Sie die Gleichung der Tangentialebene in p_0 an.

(b) In welcher Richtung $(dx, dy) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ steigt die Tangentialebene in p_0 nicht an? Wie lauten die Richtungen des stärksten Anstiegs bzw. Abstiegs von $f(x, y)$ in p_0?

Abgabetermin: Dienstag, den 1.7.2008, 12:30 Uhr, in den Fächern bei Zimmer 208.1 im Mathematikgebäude.

10. Tutorium
zur Vorlesung Höhere Mathematik II für
biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe T37:

(a) Gegeben sind vektorwertige Funktionen

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $(f^\top g)'$ und $(f \circ g)'$.

(b) Berechnen Sie für die vektorwertige Funktionen

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} y\cosh x \\ y\ \sinh x \end{pmatrix}, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

die Ableitung $(f \circ g)'$ zunächst direkt und dann mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe T38:

(a) Berechnen Sie die Ableitung (d.h. die Jacobimatrix) der folgenden Funktionen:

$$f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ x = (x_1,x_2,x_3)^\top \mapsto \dfrac{(x_2,x_3)^\top}{1+(x_1+x_2+x_3)^2} \end{array} \right. , \qquad g : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ x = (x_1,x_2)^\top \mapsto \cos(x_1x_2) \end{array} \right. .$$

(b) Definiere die Matrizen $A := f'(1,0,1)$, $B := \nabla g(\pi,1)$, $C := g'(1,\pi)$. Welche der folgenden Matrizenprodukte sind definiert: AB, BA, AC, CA ?

Aufgabe T39: Gegeben sind die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x_1^2x_2$, und ein Vektor $d := (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0,2\pi)$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und das Skalarprodukt $d \cdot \nabla f$ an der Stelle x.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x)$ nach der Definition 3.40.

Aufgabe T40: Die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3x_2 - x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^2}, & x \neq (0,0)^\top, \\ 0, & x = (0,0)^\top. \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit der Definition 3.38 die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie ferner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)$ sowie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$. Was können Sie mit dem Satz von Schwarz daraus folgern?

Tutorien: Dienstag, den 24.06.2008, bis Donnerstag, den 26.06.2008.