10. Übung.

1. Aufgabe: Ein reelles Fundamentalsystem der DGL

$$y^{(4)}(x) + 2y'''(x) + y''(x) + 2y'(x) = 0$$

ist gegeben durch $\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{1, e^{-2x}, \cos(x), \sin(x)\}$.

(a) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante von Fundamentalsystem in Abhängigkeit von x.

(b) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Lösung y der gew. DGL und der Lösung des lin. DGL-Systems

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} u(x).$$

2. Aufgabe: Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu

$$u'(x) = 2u(x) + 2v(x)$$
$$v'(x) = -\frac{1}{2}u(x) + 2v(x)$$

3. Aufgabe: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des lin. DGL-Systems

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Lösen von linearen DGL-Systemen

hom. DGL-System

$u'(x) = A\,u(x)$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (Beachte: ist u n-dim., so auch u'. Also ist A automatisch quadratisch.)

Ansatz: $u(x) = e^{\lambda x}\cdot v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$

$\lambda v = A v \Leftrightarrow (A - \lambda E) v = 0$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ (char. Polynom)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (Eigenwerte, nicht unbedingt paarweise verschieden.)

$(A - \lambda_k E) v_k = 0$ (Eigenvektoren bestimmen)
(Sind λ_k, λ_j verschieden, so sind v_k, v_j lin. unabh. → Satz 3.26)

Ansatz

Lösung: $u_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n x} v_n$

(Der Lösungsraum ist n-dim. → Satz 2.11)