14. Übung, Höhere Mathematik 2
15. Juli 2008

1. Aufgabe: Lösen Sie das AWP

$$y''(x) - 2x y'(x) - 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

mit einem Potenzreihenansatz und bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Lösung.

2. Aufgabe: Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt, \qquad z > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma(z)$ für $z > 0$ existiert und dass $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ gilt. Folgern Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 1, 2, \ldots$

3. Aufgabe: Auf dem Gebiet $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ betrachten wir die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{2}{s+1} \exp\left(x_2 (s^2 + 2s + 1)\right) ds, \qquad (x_1, x_2) \in D.$$

Berechnen Sie zunächst den Gradienten von f und dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \int_0^{t^2} \frac{2}{s+1} \exp\left(t (s^2 + 2s + 1)\right) ds.$$