Material zur HM2-Vorlesung am 3.07.08

Am Anfang des Kapitels 4.4 wurde erwähnt, dass durch das Faltungsprodukt sich eine Möglichkeit ergibt, Lösungen zu inhom. DGLen zu bestimmen. Allgem. Vorgehen ist im Bsp. 4.20 vorgestellt. Wir möchten hier ein konkretes AWP zur inhom. DGL lösen:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \underbrace{\cos(t) + 2\sin(t)}_{=:r(t)}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

<u>Lösung:</u> Die Transformation des AWPs ergibt die lineare algebr. Glg für $Y(s) := \mathcal{L}y(s)$:

$$s^2 \mathcal{L}y(s) - 2s - \cancel{4} - 2s\mathcal{L}y(s) + \cancel{4} + 2\mathcal{L}y(s) = \underbrace{\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}}_{=\mathcal{L}r(s)}.$$

Ab hier möchten wir zwei verschiedene Wege gehen. (1.) analog zu Bsp 4.20

(2.) wir benutzen $\mathcal{L}r(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$.

(1.) $$\mathcal{L}y(s) = \frac{\mathcal{L}(r)(s)}{s^2-2s+2} + \underbrace{\frac{2s}{s^2-2s+2}}$$

$$= 2\,\frac{s+1-1}{(s-1)^2+1} = 2\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + 2\,\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)^2+1}}_{=\mathcal{L}(e^t \sin t)(s)} \cdot \mathcal{L}r(s) + 2\underbrace{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}}_{=\mathcal{L}(2e^t \cos t)(s)} + 2\underbrace{\frac{1}{(s-1)^2+1}}_{=\mathcal{L}(2e^t \sin t)}.$$

Also: $$y(t) = \underbrace{\int_0^t e^{t-\tau} \sin(\tau - t) \cdot \underbrace{(\cos\tau + 2\sin\tau)}_{=r(\tau)}\, d\tau}_{= e^t \sin t \,*\, r(t)} + 2e^t \cos t + 2e^t \sin t.$$

(2.) $$\mathcal{L}y(s) = \frac{2s^3 + 2s + 2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s+2}{s^2-2s+2}$$

$$= \frac{s}{s^2+1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos t + e^t \cos t + 3e^t \sin t, \quad t \geq 0.$$