Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. A. Kirsch
M. Sc. O. Bondarenko

41	42	43	44	45	$\sum$

Gruppe

Karlsruhe, den 16.12.2011

Matrikel-Nr.: ....

Matrikel-Nr.: ....

9. Übungsblatt
zur Vorlesung Höhere Mathematik III für
biw/ciw/mach/mage/vt/geod

Aufgabe 41: Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$2yu_{xx} - (1+y^2)u_y + 4yu = 0.$$

Aufgabe 42: Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.
Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.
a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.
b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 43: Für den Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned}
&r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2,\\
&u(1,\varphi) = 1 + 3\cos\varphi + 4\sin(2\varphi),\\
&u(2,\varphi) = 1 + 2\ln 2 + 6\cos\varphi + \sin(2\varphi).
\end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.
Hinweis: Separationsansatz bzw. vgl. Skript.

Aufgabe 44: Rechnen Sie nach, dass in Polarkoordinaten (r,φ) durch

$$u(x) = f_n(kr)e^{in\varphi}, \qquad x = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}$$

eine Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

gegeben ist, wobei f_n eine Lösung der *Bessel'schen Differenzialgleichung*

$$t^2 f_n''(t) + t f_n'(t) + (t^2 - n^2) f_n(t) = 0, \quad t > 0,$$

ist.

Aufgabe 45: Lösen Sie folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
u_{tt} = 4u_{xx} \quad &\text{für} \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t, \qquad u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0,\\
u(x,0) = 1 - |x-1| \quad &\text{für} \quad 0 \leq x \leq 2, \qquad u_t(x,0) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2.
\end{aligned}$$

Hinweis: Vgl. Vorlesung. Verwenden Sie: $1 - |x-1| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$

Abgabetermin: Donnerstag, den 22.12.2011, 12:30 Uhr, in die gekennzeichneten blauen Kästen bei Seminarraum Z1/Z2 im Zähringerhaus (Geb. 01.85, Fritz-Erler-Str. 1-3).