

Youngsche Ungleichung

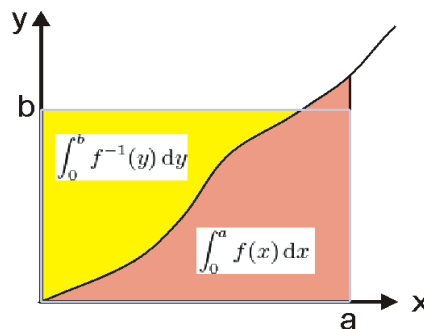
Sei f eine stetige, streng monoton steigende Funktion mit $f(0) = 0$ und sei f^{-1} die (somit vorhandene) Umkehrfunktion, welche dieselben Eigenschaften besitzt.

Dann gilt für jedes $a, b \geq 0$:

$$a * b \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy$$

Wieso ist das so?

Wie zu sehen, kann das Rechteck aus $a * b$ nicht größer sein als die Fläche der 2 Integrale.



Zu sehen: Fall $f(a) > b$.

Spezialfall der Youngschen Ungleichung

Sind $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b > 0$, so gilt:

$$a * b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis: s. Aufgabenblatt

Der Begriff der Norm ist die Verallgemeinerung des Begriffs der Länge (oder Betrag) eines Vektors, welcher aus der Schule bekannt sein sollte.

Euklidische Norm:

$$\|a\|_2 = (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{1/2}$$

Die p-Norm, welche eine Verallgemeinerung der euklidischen Norm ist, lautet:

$$\|a\|_p = (|a_1|^p + \dots + |a_n|^p)^{1/p}$$

Hölder-Ungleichung

Die Hölder-Ungleichung sagt aus, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren ($|\langle a, b \rangle|$) betragsmäßig höchstens so groß ist, wie das Produkt der Normen $\|a\|_p$ und $\|b\|_q$.

Seien $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $a_i, b_i > 0$, dann gilt:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ein Spezialfall der Hölder-Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, sie tritt ein, wenn $p = q = 2$ ist.

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Minkowski-Ungleichung

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

welche für $p = 2$ die Dreiecksungleichung ist.

Ersetzt man hier x durch $x - y$ und das $y = y - z$, mit dem Punkt z aus \mathbb{R}^n , so entsteht die äquivalente Dreiecksungleichung für den Euklidischen Abstand:

$$\|x - z\|_2 \leq \|x - y\|_2 + \|y - z\|_2,$$

welche besagt, dass der direkte Weg von x nach z in \mathbb{R}^n nicht länger ist, als der kürzeste Weg, der von x über y nach z führt.