

Zinsmodelle für Versicherungen - Diskussion der Anforderungen und Vergleich der Modelle von Hull-White und Cairns

Arbeitspapier

Robin Pfeiffer¹, Jürgen Bierbaum², Mathias Kunze²,
Norbert Quapp², Nicole Bäuerle¹

Zusammenfassung

Anwendungen von Zinsmodellen im Versicherungsbereich zeichnen sich durch die Verwendung von Zinsen verschiedener Laufzeiten, lange Vertragslaufzeiten der zu bewertenden Produkte sowie häufig einer Mindestverzinsung aus. Die Forderung einer realistischen Modellierung dieser Aspekte über lange Zeiträume hinweg ist die wesentliche Anforderung an Zinsmodelle im Versicherungsbereich. Das Fehlen beobachtbarer Preise von Versicherungsprodukten erschwert die Modellanalyse, die daher auf theoretische Modelleigenschaften sowie den Vergleich mit Referenzmodellen angewiesen ist. Der Modellvergleich unterschiedlicher Modelle stellt unterschiedliche Anforderungen an die Umsetzung der Modelle, insbesondere an Kalibrierung und Modellierung von Schocks.

1 Einleitung

Lebensversicherungsunternehmen (LVU) investieren zu großen Teilen in festverzinsliche Wertpapiere, beispielsweise in Staatsanleihen, Unternehmensanleihen, Pfandbriefe und Hypotheken. Für alle diese Anlageklassen bildet die Zinsstrukturkurve heimischer Staatsanleihen eine Benchmark der risikolosen Zinsen. Zusätzlich weisen die von LVU gegenüber den Versicherungsnehmern (VN) eingegangenen Verpflichtungen unterschiedliche, zum Teil sehr lange Laufzeiten auf. Typischerweise bieten LVU in ihren Produkten eine garantierte Ablaufleistungen oder Verzinsungen an. Der VN erhält also ein in den Versicherungsvertrag eingebettetes Zinsderivat mit sehr langen Laufzeiten. Damit sind LVU für die Bewertung der eingegangenen Zahlungsverpflichtungen sowie auch für das Risikomanagement der Anlage Seite in besonderem Maße auf Zinsmodelle angewiesen.

²Allianz Lebensversicherungs-AG Stuttgart. Die Inhalte dieser Arbeit stellen die persönliche Meinung der Autoren dar und geben nicht notwendigerweise die Position der Allianz Lebensversicherungs-AG wieder. E-mail: juergen.bierbaum@allianz.de, mathias.kunze@allianz.de, norbert.quapp@allianz.de

¹Karlsruher Institut für Technologie. Das dem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 03BAPAD2 gefördert. Die Verantwortung über den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren. E-Mail: robin.pfeiffer@kit.edu, nicole.baeyerle@kit.edu

LVU unterscheiden sich in ihren Anforderungen an Modelle der Zinsstrukturkurve zum Teil deutlich von anderen Finanzmarktakteuren. Betrachtet man die Dynamik der gesamten Zinsstrukturkurve, so liefert das kurze Ende der Zinsstrukturkurve den lokalen Diskontierungssatz, Zinsen höherer Laufzeit bilden eine Benchmark für Bondportfolios mit entsprechender Duration. Die Modellierung der Dynamik sowohl des kurzen als auch des langen Endes der Zinsstrukturkurve ist also von entscheidender Bedeutung. Auf Grund der langen Laufzeiten ergeben sich ebenfalls einige besondere Anforderungen an Zinsmodelle, die einige marktübliche Modelle nicht erfüllen können.

Die Forschung der letzten Jahre bietet einen ganzen Katalog verschiedener Zinsmodelle. Ziel dieser Arbeit ist es, Kriterien für Zinsmodelle im Versicherungsbereich vorzuschlagen und an zwei Modellen exemplarisch zu diskutieren. Dabei steht die prinzipielle, methodische Vorgehensweise im Vordergrund. Abschließend wird untersucht, wie verschiedene Modelle anhand der Bewertung von Zahlungsansprüchen aus der Versicherungspraxis „fair“ miteinander verglichen werden können.

Zinsmodelle lassen sich anhand mehrerer Eigenschaften in Gruppen einteilen, wobei ein Vergleich von Modellen aus verschiedenen Gruppen besonderer Sorgfalt bedarf. Insbesondere sind die Anzahl stochastischer Faktoren des Modells, die Möglichkeit, das Modell an die aktuelle Zinsstrukturkurve anzupassen, sowie das Zulassen negativer Zinsen solche Klassifikationseigenschaften. In der vorliegenden Arbeit sollen beispielhaft am Modell von Cairns [Cai04] und am Modell von Hull und White [HW90] Probleme und Lösungsmöglichkeiten bei der Auswahl von Zinsmodellen aufgezeigt werden. Das Cairns-Modell ist dabei als Zwei-Faktor-Modell implementiert, es garantiert positive Zinsen, lässt sich allerdings nur approximativ an eine Zinsstrukturkurve kalibrieren. Das Hull-White Modell ist ein Ein-Faktor-Modell, das an jede gegebene aktuelle Zinsstrukturkurve kalibriert werden kann, aber in Simulationen negative Zinsen zulässt. Das Cairns Modell wurde ausgewählt, da es kürzlich als Zinsmodell für LVU vorgeschlagen wurde, das Hull-White Modell, da es in der Versicherungspraxis oft verwendet wird. Die ausgewählten Modelle erlauben einen breiten Überblick über wichtige Ansätze bei drei entscheidenden Problemen der Zinsmodellierung: exakte oder approximative Kalibrierung, Ein-Faktor oder Mehr-Faktor-Modell sowie positive oder negative Modellzinsen.

In Kapitel 2 werden das Hull-White Modell sowie das Cairns Modell vorgestellt. Kapitel 3 zeigt anhand der Unterschiede beider Modelle verschiedene Kriterien für die realistische Modellierung der Zinsstrukturkurve auf, insbesondere die Anzahl stochastischer Faktoren, die Positivität der Zinsstrukturkurve im Modell, die Kalibrierungsmöglichkeit des Modells sowie die Problematik der Schätzung. In Kapitel 4 wird als Beispiel eines Modellvergleiches in der Praxis der Preis für die Garantie eines Rentenfaktors in einem langlaufenden Rentenversicherungsvertrag mit beiden Zinsmodellen bestimmt. Kapitel 5 fasst die Arbeit zusammen.

2 Modelle

In diesem Abschnitt werden die beiden verwendeten Modelle von Cairns [Cai04] sowie Hull und White [HW90] vorgestellt. Beide Modelle sind stetige No-Arbitrage Modelle. Da die beobachtete Welt ebenso wie die Modellwelt im Versicherungsbereich im Grunde diskret ist, erscheint Stetigkeit des Modells keine notwendige Forderung zu sein. Zu beachten ist hierbei allerdings, dass zur Schätzung der Modelle unter Umständen andere diskrete Zeitschritte verwendet werden müssen als für spätere Anwendungen benötigt werden. Häufig werden viertel-, halb- oder sogar jährliche Beobachtungen für die Anwendung genügen. Für die Schätzung anhand dieser Daten reichen die vorhandenen historischen Daten derselben Frequenz im allgemeinen aber nicht aus, insbesondere im Hinblick auf mögliche Strukturbrüche in den Daten. Ein Wechsel der Beobachtungsfrequenz zwischen Schätzung und Simulation ist in zeitstetigen Modellen aber einfacher zu realisieren.

Bei Zinsmodellen sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße zu unterscheiden: das physische Maß \mathcal{P} und das risikoneutrale Maß \mathcal{Q} . Für die Anwendung sind die Dynamiken der Zustandsprozesse beziehungsweise der Zinsen unter beiden Maßen von Bedeutung. Unter dem physischen Maß \mathcal{P} wird das jeweilige Modell anhand realer Daten geschätzt. Vorhersagen der Zinsstrukturkurve werden ebenfalls unter diesem Maß berechnet. Weiterhin ist das physische Maß für die Risikoanalyse von Bedeutung, etwa bei der Berechnung von Risikoprämien. Für die Bewertung von Auszahlungsprofilen wird hingegen das risikoneutrale Maß benötigt. Die Bewertung komplexer, pfadabhängiger Auszahlungsprofile ist im Allgemeinen nur mit Hilfe eines Monte Carlo Bewertungsansatzes möglich. Insbesondere sollte daher ein Zinsmodell zur Bewertung unter \mathcal{Q} schnell und einfach Zinspfade für die Monte Carlo Simulation generieren können.

Für die spätere Diskussion ist zu beachten, dass historische Beobachtungen unter dem Maß \mathcal{P} stattfinden, die Bewertung von Zahlungsansprüchen aber Simulationen unter \mathcal{Q} benötigt. Da die Maße \mathcal{P} und \mathcal{Q} äquivalente Martingalmaße sind, besitzen sie insbesondere die gleichen Nullmengen. Historisch beobachtbare Zinsstrukturkurven haben daher auch positive Wahrscheinlichkeit unter \mathcal{Q} . Dies rechtfertigt es, in späteren Kapiteln über allgemeine Eigenschaften von Zinsstrukturmodellen die Menge der historisch beobachtbaren Zinsstrukturkurven unter \mathcal{P} als Richtschnur für unter \mathcal{Q} mögliche Zinsstrukturkurven zu verwenden.

2.1 Das Cairns-Modell

Das Modell von Cairns [Cai04] stellt eine mögliche Umsetzung des Modells von Flesaker und Hughston [FH96] dar. Flesaker und Hughston präsentieren einen allgemeinen Modellrahmen, der positive Zinsen garantiert, indem Bondpreise stets kleiner 1 modelliert werden. Cairns wählt die entsprechenden Funktionen des Flesaker-Hughston Modells so, dass sie zur folgenden Formel für den Preis $P(t, T)$ zum Zeitpunkt $t \leq T$ einer sicheren Auszahlung

von 1 mit Fälligkeit in T führen

$$P(t, T) = P(X, t, T) = \frac{\int_{T-t}^{\infty} H(u, X(t)) du}{\int_0^{\infty} H(u, X(t)) du} \quad (1)$$

mit

$$H(u, X(t)) = \exp \left[-\beta u + \sum_{i=1}^n \sigma_i X_i(t) e^{-\alpha_i u} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}{\alpha_i + \alpha_j} e^{-(\alpha_i + \alpha_j) u} \right], \quad (2)$$

wobei der n -dimensionale Faktor-Prozess (oder auch Zustandsvektor) des Modells $X = (X(t)) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess folgt mit Dynamik

$$dX(t) = \text{diag}(\alpha) [V(t) - X(t)] dt + C dW^{\mathcal{Q}}(t) \quad (3)$$

und $C = ((c_{ij}))_{i,j=1,\dots,n}$ so gewählt wurde, dass $CC' = (\rho_{ij})_{i,j=1}^n$ eine instantane Korrelationsmatrix ist. Die Parameter α_i beschreiben die Rückstellkraft der Ornstein-Uhlenbeck Prozesse X_i mit $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, der Parameter $\beta > 0$ bestimmt die Funktion H für große u und damit das lange Ende der Zinsstrukturkurve. Die Parameter σ_i sind Gewichtungsfaktoren der Ornstein-Uhlenbeck Prozesse in der Bondpricing-Formel. $W^{\mathcal{Q}} = (W^{\mathcal{Q}}(t))$ ist eine n -dimensionale Brownsche Bewegung unter \mathcal{Q} . Das Gleichgewichtsniveau $V(t)$ ist stochastisch mit

$$V_j(t) := \frac{\int_0^{\infty} H(u, X(t)) \sum_{i=1}^n c_{ij} \sigma_i e^{-\alpha_i u} du}{\int_0^{\infty} H(u, X(t)) du} \quad (4)$$

für $j = 1, \dots, n$. Der Shortrateprozess ($r(t)$) ergibt sich hierbei nicht als Lösung einer einfachen stochastische Differentialgleichung, sondern aus der Grenzwertbetrachtung der instantanen Forwardrates, die man wiederum aus den Bondpreisen errechnen kann:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T) = - \lim_{T \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial T} \log(P(t, T)) = \frac{H(0, X(t))}{\int_0^{\infty} H(u, X(t)) du}. \quad (5)$$

Infolge der Positivität der Integranden und der Definition der Intervallgrenzen sind Bondpreise kleiner gleich 1 und damit Zinssätze stets positiv. Die Dynamik des Zustandsvektors unter \mathcal{Q} ist komplexer als für die meisten Zinsmodelle, da das Cairns Modell dem Vorbild von Flesaker und Hughston folgend für ein Maß $\hat{\mathcal{P}}$ definiert ist, unter dem der Zustandsvektor X einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit konstantem Gleichgewichtsniveau $\mu = 0$ folgt. Dieses Maß erlaubt eine schnelle und einfache Implementierung eines Bewertungsansatzes für Zahlungsansprüche, die nur von einem einzigen Zeitpunkt $T > 0$ abhängen, etwa Caps, Floors oder auch Swaptions. Dagegen ist es nicht möglich, eine geschlossene Formel für die Verteilung unter \mathcal{Q} anzugeben. Die Simulation der Zinsstrukturkurve unter \mathcal{Q} ist im Cairns-Modell aufwändig.

Der Maßwechsel von \mathcal{P} nach \mathcal{Q} im Cairnsmodell ist vorgegeben durch $dW^{\mathcal{P}} = dW^{\mathcal{Q}} + \gamma(t)dt$, wobei für den Marktpreis des Risikos $\gamma(t)$ gilt

$$\gamma(t) := V(t) + \theta = V(t) - C^{-1} \text{diag}(\alpha) \mu, \quad (6)$$

das heißt der Marktpreis des Risikos im Cairns Modell ist stochastisch. Die Dynamik des Zustandsvektors X unter \mathcal{P} folgt damit einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit konstantem Gleichgewichtsniveau μ , die Dynamik unter \mathcal{Q} folgt einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit stochastischem Gleichgewichtsniveau ($V(t)$). In den folgenden Anwendungen wird das Cairns Modell stets als Zwei-Faktor Modell implementiert, also $n = 2$.

2.2 Das Hull-White Modell

Das Modell von Hull und White [HW90] ist eine Erweiterung des Ein-Faktor Vasicek Modells [Vas77] zur genauen Anpassung an eine gegebene Zinsstrukturkurve in $t = 0$ und damit ein Vertreter des affinen Modellrahmens nach Duffie und Kan [DK96] sowie Dai und Singleton [DS00]. In diesem Modellrahmen ist die Shortrate als affine Funktion des Zustandsvektors definiert. Insbesondere im akademischen Bereich werden die affinen Modelle als Referenz verwendet. Zur Anpassung an eine gegebene Zinsstrukturkurve nehmen Hull und White das Gleichgewichtsniveau des Vasicek Modells als deterministische Funktion in der Zeit an, die von den Modellparametern und der heutigen Zinsstrukturkurve bestimmt wird. Die Shortratedynamik unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} im Hull-White Modell ist gegeben durch

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)] dt + \sigma dW^{\mathcal{Q}}(t), \quad (7)$$

wobei $W^{\mathcal{Q}} = (W^{\mathcal{Q}}(t))$ eine Brownsche Bewegung unter \mathcal{Q} ist. Das Gleichgewichtsniveau $\vartheta(t)$ ist als deterministische Funktion in der Zeit definiert als

$$\vartheta(t) := \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \quad (8)$$

wobei $f^M(0, t)$ die im Zeitpunkt 0 am Markt beobachtete instantane Forwardrate für eine Anlage im Zeitpunkt t ist. Die Dynamik unter \mathcal{Q} ist damit sehr einfach und schnell zu implementieren, die Shortrate folgt einer angebbaren Normalverteilung. Zinsen mit höherer Laufzeit lassen sich im Hull-White Modell über die Bondpreise berechnen

$$P(t, T) := A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}. \quad (9)$$

mit $B(t, T) := (1 - e^{-a(T-t)})/a$ und

$$A(t, T) := \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left(B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2\right), \quad (10)$$

wobei $P^M(0, T)$ der im Zeitpunkt $t = 0$ am Markt beobachtete Preis eines Nullkuponbonds mit sicherer Auszahlung 1 im Auszahlungszeitpunkt T ist. Insbesondere sind damit Kassazinsen $y(t, T)$ von Zerobonds höherer Laufzeit gegeben durch

$$y(t, T) = -\frac{\log(P(t, T))}{T-t} = -\frac{\log(A(t, T))}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t}r(t), \quad (11)$$

also affine Funktionen der Shortrate $r(t)$. Damit sind Zinsen verschiedener Laufzeiten stets perfekt korreliert.

3 Modelleigenschaften

3.1 Anzahl stochastischer Faktoren

Ein systematischer Unterschied zwischen dem Cairns- und dem Hull-White Modell liegt in der Anzahl der stochastischen Faktoren. Cairns ist ein Mehr-Faktor-Modell, bei Hull-White beschreibt nur ein stochastischer Faktor die Dynamik der gesamten Zinsstrukturkurve. Litterman und Scheinkman [LS91] wiesen nach, dass drei Faktoren zur realistischen Abbildung der Zinsstrukturkurve notwendig sind:

- *Level*: das Niveau der Zinsstrukturkurve
- *Slope*: die Steigung der Zinsstrukturkurve, messbar als Differenz zwischen einem längerfristigen und einem kurzfristigen Zins
- *Curvature*: die Krümmung der Zinsstrukturkurve.

Diese drei stochastischen Faktoren beschreiben 94% der Dynamik der gesamten Zinsstrukturkurve, insbesondere die Abfolge der verschiedenen Formen der Zinsstrukturkurve, erhöhen aber die generelle Komplexität des Modells. Zur Notwendigkeit von Mehr-Faktor-Modellen in aktuariellen Anwendungen siehe auch die Ergebnisse in Fischer, May und Walther [FMW03] und [FMW04].

In Anwendungen der Versicherungswirtschaft benötigt man auf der Passivseite für die Diskontierung von Auszahlungsverpflichtungen eine vollständige aktuelle Zinsstrukturkurve - oder in Monte Carlo Ansätzen zur Bewertung dieser Auszahlungsverpflichtungen simulierte Pfade der Shortrate, also die Dynamik des kurzen Endes der Zinsstrukturkurve unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} . Auf der Anlagenseite benötigt man zum einen eine sichere Rendite zur Modellierung von Rentenpapieren, zum anderen eine Aktienrendite. Ein einfacher Ansatz für die Rendite bei Fixed Income Anlagen stellt die Approximation durch einen einzelnen (risikolosen) Zinssatz dar, dessen Laufzeit gerade der Duration des Fixed Income Portfolios entspricht. Je höher diese Duration, je wichtiger ist aber die realistische Abbildung des langen Endes der Zinsstrukturkurve für die Anwendung. Die Drift der Aktienrendite unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} entspricht der Shortrate, also dem kurzen Ende der Zinsstrukturkurve.

Im September 2008 sank der 1-jährige Zinssatz deutscher Staatsanleihen um 185 Basispunkte von 4.24 auf 2.35 Prozent, der 10-jährige Zinssatz lediglich um 18 Basispunkte von 4.26 auf 4.08 Prozent. Dies ist typisch für den geldpolitischen Ansatz des Interest Rate Targetings: Die Zentralbank implementiert ihre Geldpolitik durch Veränderung des Leitzinses, also Veränderung des kurzen Endes der Zinsstrukturkurve. Das lange Ende der Zinsstrukturkurve reagiert auf solche Leitzinsänderungen für gewöhnlich schwächer. Bei Monatsenddaten der deutschen Zinsstrukturkurve von Januar 1978 bis Januar 2008 bewegten sich 1-Jahres-Zins und 10-Jahres-Zins in etwa einem Viertel der Beobachtungen

sogar gegenläufig. Die Dynamik der Shortrate allein ist damit ein ungenügendes Maß für die Entwicklung der gesamten Zinsstrukturkurve, siehe etwa auch Abbildung 1. Infolgedessen sollte ein Zinsmodell für die Versicherungswirtschaft zumindest die ersten beiden Faktoren nach Litterman und Scheinkman [LS91], Level und Slope, realistisch abbilden, um sowohl realistische Werte für die Shortrate als auch realistische Werte für einen längerfristigen Zinssatz als Approximation der Rendite eines Bondportfolios mit entsprechender Duration zu erhalten.

Das Hull-White Modell [HW90] beschreibt lediglich die Shortrate als stochastischen Prozess. Zinsen höherer Laufzeiten lassen sich als affine Funktionen der Shortrate berechnen, auch der Slope ist eine affine Funktion der Shortrate. Somit lässt sich beim Hull-White Modell – aber auch bei CIR [CIR85] und CIR++ [BM01] oder beim Vasicek Modell [Vas77] – schon im Zeitpunkt t_0 mithilfe der Funktionen $A(t, T)$ und $B(t, T)$ für jeden zukünftigen Zeitpunkt $t > t_0$ der Slope als affine Funktion der dann geltenden Shortrate $r(t)$ berechnen. Abbildung 1 zeigt einen solchen Plot des historischen deutschen 1-Jahres-Zinses gegen den historischen Slope, gemessen als Differenz des 10-jährigen und des 1-jährigen Zinses, sowie die in einem Hull-White Modell möglichen Shortrate-Slope Kombinationen in $t = 10$ Jahren gegeben die Zinsstrukturkurve Ende Januar 1998 (t_0). Offensichtlich ist das Hull-White Modell nicht in der Lage, die Mehrzahl historisch beobachtbarer Zinsstrukturkurven nachzubilden.

Cairns [Cai04] hebt für sein Modell die große Menge abbildbarer Formen der Zinsstrukturkurve hervor, wobei die Anzahl der Faktoren die Flexibilität in der Abfolge dieser Zinsstrukturkurven erhöht. Eine Untersuchung des aus historischen Daten geschätzten Zustandsprozesses \hat{X}_t des Cairns Modells zeigt, dass stets einer der beiden Faktoren hoch korreliert ist mit Zinsen hoher Laufzeiten, während der jeweils andere Faktor hoch korreliert ist mit dem Slope. Das Zwei-Faktor Modell beschreibt damit die beiden wichtigsten stochastischen Faktoren der Zinsstrukturkurve nach Litterman und Scheinkman [LS91], Level und Slope. Ein derartiger Zusammenhang zwischen den Faktoren nach Litterman und Scheinkman und den einzelnen Komponenten des Zustandsvektors ist typisch für Mehr-Faktor-Modelle.

Ein einfaches Kriterium für die Fähigkeit eines Modells, verschiedene Zinsstrukturkurven abzubilden, liegt in der Untersuchung der Anpassung an historische Daten. Für alle bisher betrachteten Modelle lassen sich mit einem Kalman Filter anhand historischer Daten die Modellparameter schätzen. Gegeben diese Modellparameter lässt sich dann, wiederum mit dem Kalman Filter, der historische Zustandsprozess $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ unter dem physischen Maß \mathcal{P} schätzen. Der geschätzte Zustandsprozess impliziert Zinsstrukturkurven $\{y(\hat{X}_t, t + \tau_j); j = 1, \dots, d\}$ für jeden Zeitpunkt t . Der Mittlere Absolute Fehler (Mean Absolute Error, MAE) einer bestimmten Laufzeit τ_j , $j \in \{1, \dots, d\}$ berechnet sich dann als

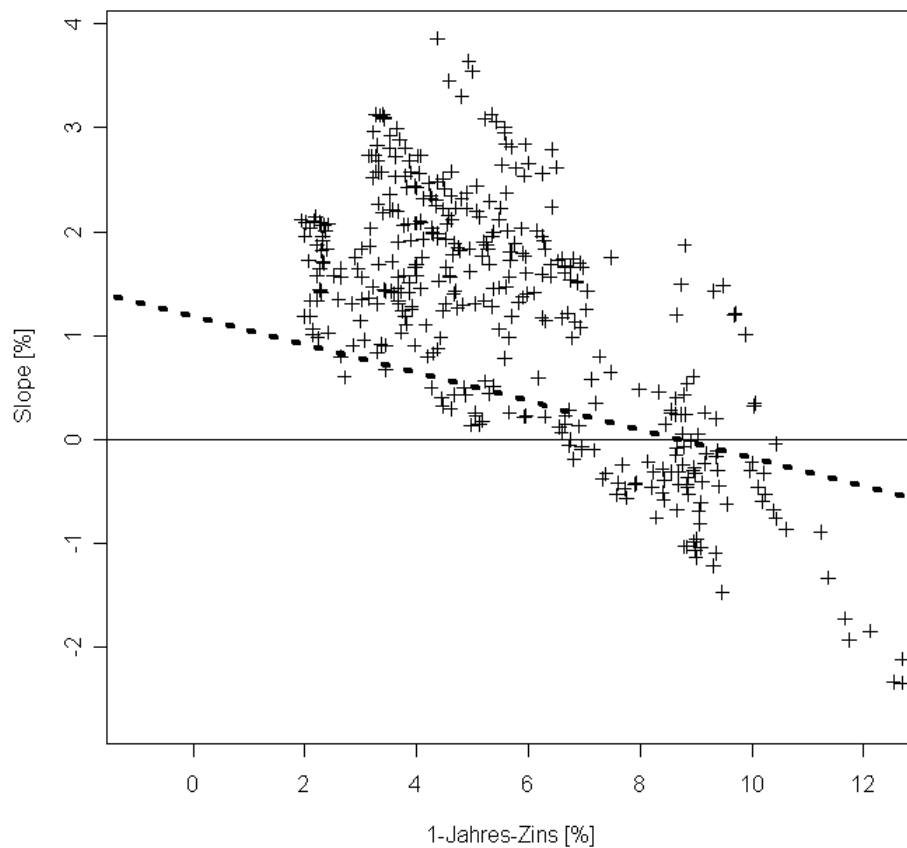


Abbildung 1: Scatterplot des historischen deutschen 1-Jahres-Zinses gegen den entsprechenden Slope 1976 bis 2008 und die Menge aller im Jahr 2008 in einem Hull-White Modell mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichbaren Slopes bedingt auf die Zinsstrukturkurve Ende Januar 1998 (gepunktete Linie).

die über die Zeit t gemittelte, absolute Differenz der empirischen Beobachtung $y(t, t + \tau_j)$

$$MAE(\tau_j) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| y(t_i, t_i + \tau_j) - y(\hat{X}_{t_i}, \tau_j) \right|. \quad (12)$$

Ein niedriger MAE bedeutet insbesondere, dass das untersuchte Modell in der Lage ist, im Mittel die Vielzahl historisch beobachteter Zinsstrukturkurven nachzubilden. Die historische Anpassung über den MAE misst allerdings die Fähigkeit eines Modells, eine realistische Dynamik abzubilden, nur teilweise. Die Vorhersagefähigkeit eines Modells stellt ein besseres Maß für die Abbildung der Dynamik dar, da hier die Übergangswahrscheinlichkeiten des Zustandsprozesses eine größere Rolle spielen. Tabelle 1 zeigt die MAEs des verwendeten Cairns-Modells zu verschiedenen Laufzeiten bei amerikanischen Zinsdaten. Schätzungen eines Drei-Faktor-Modells ergeben zum Teil deutlich bessere MAEs.

Laufzeiten [Jahre]		0.25	0.5	1	2	3	5	7	10	20	30
US	Zwei-Faktor	15	11	8	12	13	18	16	18	24	44
US	Drei-Faktor	5	5	7	4	3	4	6	7	8	10

Tabelle 1: Mittlerer absoluter Fehler in Basispunkten von Zwei- und Drei-Faktor-Modellen nach Cairns für amerikanische Schätzdaten.

Während also für eine realistische Beschreibung der Shortratedynamik ein stochastischer Faktor genügt, benötigt man für eine realistische Beschreibung eines kurzfristigen und eines langfristigen Zinssatzes zwei stochastische Faktoren, Level und Slope. Im Versicherungsbereich wird die Anlageseite eines Vertrages häufig durch einen Aktienfonds und ein Bondportfolio mit variabler Duration modelliert. Mehr-Faktor-Modelle bieten eine realistischere Dynamik der gesamten Zinsstrukturkurve über einen längeren Zeitraum, also eine realistischere Modellierung des Anlageerfolgs im Bondportfolio. Je stärker der Anlageerfolg eines Versicherungsvertrages vom Bondmarkt abhängt, insbesondere im Hinblick auf eingebettete Garantien im Vertrag, je eher empfiehlt sich daher die Verwendung eines Zwei-Faktor-Modells.

3.2 Positivität

Die Frage der Positivität der Zinsen stellt im Grunde ein Problem der abbildbaren Formen der Zinsstrukturkurve dar. Generell verlangt die Positivität von Zinsen nicht-symmetrische Verteilungen der einzelnen Zinsraten. Das Cairns-Modell erreicht dies durch eine nichtlineare Abbildung, das Modell von Black und Karasinski [BK91] durch eine Lognormalverteilung der Shortrate. Eine häufige Konsequenz der Nichtlinearität ist daher die höhere Komplexität dieser Modelle.

Die Bedeutung negativer Zinsen liegt in den impliziten Garantien, die in Versicherungsprodukten eingebettet sind. Positivität innerhalb des Modells beschränkt die möglichen Verluste durch eine gewährte Zinsgarantie. Werden negative Zinsen zugelassen, sind

die möglichen Belastungen durch den Garantiezins im Prinzip unbeschränkt. Ein möglicher negativer Diskontierungssatz erhöht noch die Auswirkungen dieser Belastungen zum Zeitpunkt $t = 0$. Diese Effekte negativer Zinsen können ausgeglichen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit negativer Zinsen entsprechend gering ist. Dies setzt allerdings hohe Anforderungen an die Verteilung von Zinsen sämtlicher Laufzeiten.

Der historisch häufigste Fall von Niedrigzinsszenarien besteht in niedrigen kurzfristigen Zinsen, aber einem gleichzeitig hohen Slope, das heißt die Zinsstrukturkurve ist sehr steil. Ein Beispiel hierfür wäre im Falle der amerikanischen Zinsstrukturkurve der Zeitraum von November 2001 bis Oktober 2004, während dem der 3-Monatszinssatz unter 2% lag, der 10-Jahres Zins aber stets mindestens 221 Basispunkte darüber notierte. Eine ähnliche Beobachtung in Deutschland wären die Jahre 2003 und 2004 mit einem durchschnittlichen 1-Jahres Zinssatz von 2.25% und einem durchschnittlichen Slope von 169 Basispunkten. Diese Beispiele reflektieren eine grundsätzliche Eigenschaft von Zinsstrukturkurven: besonders niedrige kurzfristige Zinsen implizieren zumeist steile, normale Kurven, sehr hohe Shortrates hingegen inverse Kurven. Die Nachbildung dieses Zusammenhangs ist eine Mindestvoraussetzung für Zinsmodelle, die sowohl das Cairns als auch das Hull-White Modell, sowie generell die affinen Modelle erfüllen. Ein für LVU kritischer Fall besteht in niedrigen kurzfristigen Zinsen bei gleichzeitig niedrigem Slope, wie etwa in Japan, wo der 10-jährige Zinssatz von Staatsanleihen seit Februar 1999 stets unter 2% lag. In diesem Fall führt eine Änderung der Duration kaum zu höheren Renditen der Fixed Income Anlagen. Der Vorteil der Positivität bei Zinsmodellen gewinnt also an Bedeutung bei der langfristigen Modellierung, welche Japan-Szenarien berücksichtigen sollte, sowie im Falle niedriger Eingangszinsstrukturkurven. Ist die Eingangszinsstrukturkurve hingegen ausreichend hoch, sowie der Betrachtungszeitraum eher kurz, kann auf die zusätzliche Komplexität, welche durch Positivität der Zinsen typischerweise verursacht wird, verzichtet werden, da in diesen Fällen die Wahrscheinlichkeit für niedrige Zinsen gering ist.

Im Falle der deutschen Zinsstrukturkurve von 1976 bis 2008 sind der Slope gemessen als Differenz des 10-jährigen und des 1-jährigen Zinssatzes und der 1-jährige Zinssatz mit -0.66 korreliert, passend zum oben beschriebenen gewöhnlichen Zusammenhang zwischen Slope und Shortrates. Die Nullzinsgrenze stellt hier eine Besonderheit dar, die das klassische geldpolitische Instrumentarium einer Anpassung des kurzfristigen Leitzinses durch die Zentralbank einschränkt. In der aktuellen wirtschaftlichen Situation hat der Leitzins die Nullzinsgrenze in vielen Ländern bereits erreicht, weiter fallende Inflationsraten sowie ein unvermindert fortlaufender wirtschaftlicher Abschwung würden unter anderen Umständen aber eine weitere Leitzinssenkung ermöglichen beziehungsweise erfordern. Bernanke, Reinhart und Sack [BRS04] diskutieren für diese makroökonomische Situation zwei alternative geldpolitische Maßnahmen:

1. Die Zentralbank verpflichtet sich glaubhaft, den Leitzins solange wie nötig nahe der Nullzinsgrenze zu belassen. Insbesondere koppelt die Zentralbank das Ende ihrer

Nullzinspolitik an beobachtbare Ereignisse, wie etwa eine Rückkehr zum Wirtschaftswachstum oder einer Mindestinflationsrate.

2. Die Zentralbank verfolgt ein sogenanntes *Quantitative Easing*, das heißt die Zentralbank kauft Wertpapiere am Markt auf und erhöht die Liquidität im Finanzsystem, indem die Verkäufer Wertpapiere gegen Zentralbankgeld tauschen können. Insbesondere heimische Staatsanleihen werden dabei aufgekauft, andere Anleihen oder auch Aktien sind ebenfalls denkbar, bergen aber im Gegensatz zu Staatsanleihen das Risiko von Verlusten für die Zentralbank durch Kreditausfälle und Kursschwankungen.

Diese beiden geldpolitischen Maßnahmen implizieren ein bestimmtes Verhalten der Zinsstrukturkurve nahe der Nullzinsgrenze. Eine glaubhafte Selbstverpflichtung der Zentralbank, den Leitzins im Zeitraum $[t_0, T]$ nahe der Nullzinsgrenze zu halten, setzt kurzfristige Zinssätze $y(t_0, t_1)$ mit $t_1 < T$ auf das von der Zentralbank gewünschte konstante Niveau r und auch kurzfristige Forwardrates $f(t_0, t_1, t_2)$ mit $t_2 < T$ auf eben dieses Niveau r . Dies impliziert eine flache Zinsstrukturkurve nahe der Nullzinsgrenze.

Die zweite mögliche Maßnahme des Quantitative Easings beruht im Wesentlichen auf dem Ankauf von Staatsanleihen mit höheren Laufzeiten, um Liquidität in die Märkte zu injizieren. Der Kauf von Staatsanleihen in größerem Ausmaß senkt aber deren Rendite. Quantitative Easing führt so zu sinkenden langfristigen Zinsen und somit ebenfalls zu einer Abflachung der Zinsstrukturkurve.

Die gewöhnliche Funktionsweise der Geldpolitik verlangt in der geschilderten makroökonomischen Situation fallende Leitzinsen und daher einen fallenden Level der Zinsstrukturkurve. Diese Maßnahmen resultieren gewöhnlich in einem steigenden Slope. Demgegenüber verursachen die beiden vorgestellten alternativen Maßnahmen in der Nähe der Nullzinsgrenze einen fallenden Slope. Die Nullzinsgrenze stellt also nicht nur eine geldpolitische Herausforderung dar, sondern auch eine Herausforderung an jedes Zinsmodell, da sich die Dynamik von Level und Slope in der Nähe der Nullzinsgrenze ändert. Diese spezielle Dynamik des Slope führt zu den niedrigen und flachen Zinsstrukturkurven des für Versicherungen kritischen Japan-Szenarios.

Aus Modellierungssicht ergeben sich insgesamt 3 Probleme aus dem Japan-Szenario, beziehungsweise allgemeiner aus der Nullzinsgrenze:

1. Gefordert ist eine *positive Wahrscheinlichkeit für ein Japan-Szenario* in einem bestimmten Modell beziehungsweise allgemein die Nachbildung der realen Dynamik der Zinsstrukturkurve in der Nähe der Nullzinsgrenze: Bei Zinsmodellen, die negative Zinsen zulassen, bleibt die gewöhnliche Funktionsweise der Geldpolitik in Simulationen auch bei sehr niedrigen Zinsen erhalten. In den Ein-Faktor-Shortrate-Modellen Hull-White [HW90] und Vasicek [Vas77] beispielsweise wird der Slope deterministisch durch die Dynamik der Shortrate festgelegt. Eine Anpassung an historische Daten führt zu einer Slopefunktion mit negativer Steigung in der Shortrate. Bei affinen

Modellen mit mehreren Faktoren [DS00] aber ohne Positivität ist ein Japan-Szenario unwahrscheinlich infolge der Schätzung, die für die Dynamik des Modells die gewöhnliche Funktionsweise der Geldpolitik auf Shortrate und Slope festlegt. Lediglich ein Mehr-Faktor-CIR-Modell scheint nach Fischer, May und Walther [FMW04] im affinen Modellrahmen in der Lage, die Dynamik von Niedrigzinsphasen nachzubilden. Mit Hilfe des Kalman Filters lässt sich für das Cairns Modell der Zustandsprozess X aus historischen Daten schätzen. Eine Analyse ergab, dass im Cairns Zwei-Faktor-Modell der eine Faktor den Slope beschreibt, der jeweils andere Faktor einen langfristigen Zinssatz. Wenn dieser Level-Faktor entsprechend niedrig ist, resultiert dank garantierter Positivität ein Japan-Szenario.

2. Aus Modellierungssicht erreichen Shortratemodelle mit Mean Reversion und konstantem Gleichgewichtsniveau μ wie die Ein-Faktor-Shortrate-Modelle Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross sowie CIR++, kaum die *lange Dauer der Niedrigzinsphase* wenn μ entsprechend dem langjährigen Mittel der Zinsstrukturkurve geschätzt wird. Auch im Hull-White Modell ist die lange Dauer nur dann erreichbar, falls das Gleichgewichtsniveau $\vartheta(t)/a$ über einen längeren Zeitraum entsprechend niedrig ist. Das Cairns Modell hingegen ist explizit zur Simulation eines Japan-Szenarios geeignet.
3. In den Cox-Ingersoll-Ross [CIR85], CIR++ [BM01] und Mehr-Faktor-Cox-Ingersoll-Ross Modellen [FMW04] hängt die *Volatilität* vom Niveau der Shortrate ab, so dass Zinsen nahe der Nullzinsgrenze eine zu geringe Volatilität aufweisen. Der Modellaspekt, der bei Cox-Ingersoll-Ross Modellen Positivität garantiert, sorgt daher für eine unrealistische Volatilitätsannahme bei niedrigen Zinsniveaus. Auch im Cairns Modell sinkt infolge der absoluten unteren Schranke die Volatilität von Zinsen in der Nähe der Nullzinsgrenze. Eine Untersuchung der Standardabweichung von mit dem Cairns Modell simulierten Zinsstrukturkurven weist jedoch darauf hin, dass für die Volatilität eine untere Schranke echt größer Null existiert.

Die vergangenen Monate haben gezeigt, dass lange Niedrigzinsphasen nicht mehr nur ein theoretisches Problem der Versicherungsbranche darstellen, welches mit Hilfe alternativer Investments, einer Erhöhung der Duration im Bondportfolio und einem Rückgriff auf stille Reserven gelöst oder zumindest überbrückt werden kann. Für die Modellierung langfristiger Versicherungsverträge sollten daher Niedrigzinsszenarien mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten können. Langfristige Niedrigzinsszenarien in Zinsmodellen, welche negative Zinsen zulassen, führen allerdings zu hohen bedingten Wahrscheinlichkeiten für negative Zinsen, so dass für langfristige Modellierung Modelle zu empfehlen sind, welche positive Zinsen garantieren.

Zur Problematik der Positivität im Hinblick auf die Modellkalibrierung innerhalb eines Niedrigzinsszenarios siehe Kapitel 3.3.4.

3.3 Schätzung und Kalibrierung

Für die Schätzung von Zinsmodellen ist interessant, welche Daten benötigt werden, wie stabil die Schätzung ist, und wie schnell neue Beobachtungen in die Schätzung integriert werden können, beziehungsweise müssen. Weiterhin benötigt die Schätzung für gewöhnlich eine Anpassung des Modells an die aktuelle Marktlage, im folgenden *Kalibrierung* genannt, die ihrerseits Anforderungen stellt an die verfügbaren Daten in $t = 0$.

3.3.1 Schätzung und Kalibrierung des Cairns Modells

Die Schätzung des Cairns Modells erfolgte mit Hilfe des Extended Kalman Filters nach Kellerhals [Kel01] (siehe auch Albrecht [AM08]). Dieser beruht auf einer Linearisierung der Bondpreisfunktion $P(X, t, T)$ und ermöglicht damit lediglich eine Quasi-ML Schätzung der Modellparameter. Geschätzt wurden die Parameter eines Zwei-Faktor-Cairns-Modells anhand von Monatsenddaten der Zinsstrukturkurve amerikanischer Staatsanleihen von Januar 1984 bis Januar 2008 mit Laufzeiten von 3 Monaten bis 30 Jahren. Die geschätzten Parameter sind $\alpha = (0.62, 0.22)$, $\beta = 0.01$, $\sigma = (0.33, 0.50)$, $\rho = -0.21$ und $\mu = (-1.72, -2.36)$. Innerhalb des Kalman Filters gilt die Annahme, dass jegliche Beobachtung stets einem Messfehler unterliegt, der allerdings ebenfalls geschätzt werden kann. Der geschätzte Messfehler des Kalman Filters beträgt 0.0015.

Die Berechnung eines Loglikelihood-Wertes mit dem Kalman Filter wird deutlich vereinfacht und der erhaltene Loglikelihood-Wert deutlich verbessert, wenn der Anfangszustand X_0 des Modells so festgelegt wird, dass bereits die erste Beobachtung Y_0 gut beschrieben wird. Dies hat zur Folge dass der geschätzte Pfad des Zustandsvektors von Anfang an Nahe an den tatsächlichen Daten verläuft. Im Cairns Modell ist die Eingangszinsstrukturkurve endogen in dem Sinne, dass sie durch die Abbildung $P(X_0, 0, T)$ für verschiedene beobachtete Restlaufzeiten T in Abhängigkeit vom Anfangszustand X_0 bestimmt wird. Im Cairns Modell lässt sich daher lediglich derjenige Anfangszustand X_0 bestimmen, dessen Modell-implizite Zinsstrukturkurve $Y_0(X_0) := (y(X_0, 0, T_1), \dots, y(X_0, 0, T_d))$ die aktuell beobachtete Zinsstrukturkurve Y_0 am besten approximiert. Das heißt die Kalibrierung im Cairns-Modell bestimmt den Zustand

$$X^{Calib}(0) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} \{|Y_0(x) - Y_0|\} \quad (13)$$

bezüglich einer Norm $|\cdot|$. Generell gilt, dass ein Modell, welches die zur Schätzung verwendeten historischen Beobachtungen gut trifft, sich auch an eine gegebene Zinsstrukturkurve gut kalibrieren lässt. Das Zwei-Faktor-Cairns-Modell trifft eine gegebene Zinsstrukturkurve mit einem durchschnittlichen mittleren absoluten Fehler von 18 Basispunkten gegenüber den amerikanischen Schätzdaten. Die Anpassung verbessert sich mit der Aufnahme weiterer stochastischer Faktoren auf einen durchschnittlichen MAE von 6 Basispunkten, siehe Tabelle 1.

Ein Vorteil von Modellen, die anhand des Ansatzes in (13) an eine beobachtbare Marktsituation angepasst werden, liegt in ihrer Flexibilität zur Anpassung auch an einen breiteren Marktquerschnitt der etwa zusätzliche Cap- oder Swaptionpreise beinhaltet.

3.3.2 Schätzung und Kalibrierung des Hull-White Modells

Die Bestimmung geeigneter Parameterwerte für das Hull-White Modell [HW90] kann nach zwei verschiedenen Methoden erfolgen. Zum einen lassen sich die Parameter mit Hilfe etwa des Kalman Filters und der Dynamik des Hull-White Modells unter dem physischen Maß \mathcal{P} an historischen Daten schätzen. Analog zum Vorgehen bei Cairns erfordert dies die Kalibrierung des Modells an die Marktsituation in $t = 0$. Das Hull-White Modell wird nach Modelldefinition an die Eingangszinsstrukturkurve kalibriert, indem das Gleichgewichtsniveau als deterministische Funktion der Zeit angenommen wird, die von der Eingangszinsstrukturkurve abhängt. Dies erlaubt eine exakte Anpassung des Modells an eine gegebene Eingangszinsstrukturkurve in dem Sinne, dass die Zinsen des Modells zum Zeitpunkt $t = 0$ exakt den vorgegebenen Werten entsprechen. Zum Modellvergleich wurden als Parameter des Hull-White Modells $a = 0.1$ und $\sigma = 1\%$ aus historischen Daten geschätzt.

Andererseits können die Hull-White Parameter auch geschätzt werden anhand einer einzigen Marktbeobachtung, die die aktuelle Zinsstrukturkurve sowie aktuelle Preise von Zerobondoptionen umfasst. Da Preise von Zerobondoptionen, also Optionen mit Ausübungszeitpunkt τ und Auszahlungsprofilen $H_\tau := \max(P(\tau, T) - K, 0)$ für Calls beziehungsweise $H_\tau := \max(K - P(\tau, T), 0)$ für Puts, im Hull-White Modell deterministische Funktionen sind, lassen sich mit Hilfe der aktuellen Zinsstrukturkurve in $t = 0$ und aktueller Zerobond-Optionspreise die Modellparameter a und σ bestimmen. Dieser Ansatz wird in Kapitel 4.3 verwendet, um ein Hull-White Modell sowohl in Bezug auf die Eingangszinsstrukturkurve, als auch in Bezug auf die Modellparameter a und σ an ein Cairns Modell anzupassen. In diesem Fall legt also eine Kalibrierung an Marktdaten bereits das gesamte Modell fest. Zusätzliche Daten über die Preise von Swaptions oder Caps lassen sich wie im Cairns Modell in den Kalibrierungsansatz nur über Approximationen integrieren.

3.3.3 Stabilität der Schätzung

Bei beiden Modellen stellt sich sowohl in Hinblick auf Kalibrierung, als auch im Hinblick auf die Schätzung die Frage, welche Daten in welcher Qualität benötigt werden. Neue Beobachtungen am Markt erfordern unter Umständen eine neue Schätzung, auf jeden Fall aber eine neue Kalibrierung. Die Schätzparameter, die die langfristige Dynamik des Modells steuern, sollten allerdings stabil sein gegenüber neuen Daten. Die gesamte affine Modellklasse, CIR++ sowie auch Cairns und Black-Karasinski für $\log(r_t)$ bauen auf Ornstein-Uhlenbeck Prozessen auf, deren Gleichgewichtsniveaus und Korrelationen häufig lange Datenreihen zur Schätzung benötigen, was zu Problemen bei eventuellen Strukturbrüchen in den Daten

führt. Für eine hohe Stabilität der Schätzung spricht etwa eine hohe Anpassung des Modells an lange Zinszeitreihen gemessen etwa durch den MAE. Der durchschnittliche MAE des Cairns Modells einer Schätzung an amerikanischen Zinsdaten von Januar 1984 bis Januar 2008 liegt für den Schätzbereich bei 18 Basispunkten, für einen Zeitraum von Oktober 1979 bis Januar 2008, also einer Erweiterung der Schätzdaten um die außergewöhnlich volatile Phase von 1979 bis 1982, bei 20 Basispunkten. Die Schätzungen des Cairns Modells sind also äußerst stabil.

Demgegenüber legt eine Kalibrierung des Hull-White Modells an eine Eingangszinsstrukturkurve sowie Preise von Zerobondoptionen alle Parameter des Modells fest. Eine Folge dieses Ansatzes ist, dass jede Marktsituation ein neues Hull-White Modell impliziert, so dass man von einer geringeren Stabilität des Hull-White Modells ausgehen muss. Auch wenn lediglich an die Eingangszinsstrukturkurve kalibriert wird, ist von einer geringeren Stabilität des Hull-White Modells auszugehen, da gerade die langfristige Dynamik des Modells durch das Gleichgewichtsniveau und damit durch die Eingangszinsstrukturkurve bestimmt wird.

3.3.4 Spezielle Probleme bei der Kalibrierung des Hull-White Modells

Die prägende Eigenschaft des Hull-White Modells liegt in der Möglichkeit einer exakten Kalibrierung des Modells an eine gegebene Zinsstrukturkurve. Die Kalibrierung stellt allerdings besondere Anforderungen an die verfügbaren Daten.

1. Zur Kalibrierung des Hull-White Modells, aber auch des CIR++ Modells, geht die *instantane Forwardrate* $f(t, T)$ ein sowie ihre Ableitung, also die erste und zweite Ableitung der Zerobondkurve. Die Zerobondkurve selbst ist allerdings lediglich eine Approximation aus 10 bis 20 am Markt beobachteten Preisen von Kuponbonds. Die Kalibrierung beruht also auf der Anpassung der ersten und zweiten Ableitung einer Approximation von Marktdaten, siehe auch Rogers [Rog95].
2. Die in der Praxis zur Kalibrierung im Hull-White Modell vorliegenden Daten zu verschiedenen Laufzeiten entsprechen typischerweise nicht der für Simulationen benötigten Frequenz. Interpoliert man die Daten einer veröffentlichten Approximation der Zerobondkurve linear, führt dies zu Sprüngen im Gleichgewichtsniveau $\vartheta(t)/a$ durch die Ableitungen der Forwardrates. Eine Interpolation der Zerobondkurve, aus denen dann die Zinsen für alle Laufzeiten berechnet werden können, führt zu einer deutlich glatteren instantanen Forwardratekurve und damit zu glatteren Gleichgewichtsniveaus. In Kapitel 4.1 werden wir sehen, dass relativ kleine Änderungen der Eingangszinsstrukturkurve zu deutlich stärkeren Änderungen im Gleichgewichtsniveau des Hull-White Modells führen können. Das gewählte Interpolationsverfahren kann daher signifikanten Einfluss auf die Eingangszinsstrukturkurve und damit auf das Gleichgewichtsniveau $\vartheta(t)/a$ haben.

3. Ein grundlegendes Problem für das Hull-White Modell stellt sich bei *extremen aktuellen Zinsbeobachtungen*. Im Falle eines Japan-Szenarios etwa impliziert das Gleichgewichtsniveau in Simulationen im Mittel niedrige Zinsen über einen langen Zeitraum und damit über einen längeren Simulationszeitraum hohe Wahrscheinlichkeiten negativer Zinsen. Während solcher Ausnahme-Zinsszenarien stellt sich also beim Hull-White Modell die Frage, ob die Kalibrierung an aktuelle Marktdaten tatsächlich ein realistisches Gleichgewichtsniveau für Simulationen festlegt. Gerade in der Frage der Kalibrierung während Niedrigzinsszenarien wird so der Vorteil von Zinsmodellen, die wie das Cairns Modell positive Zinsen garantieren, deutlich.

4. Die *maximale Laufzeit* von Staatsanleihen in Deutschland beträgt 15 Jahre, in den USA bis zu 30 Jahre. Im Hull-White Modell stellt die höchste beobachtete Laufzeit der aktuellen Zinsstrukturkurve den Endpunkt der Funktion $\vartheta(t)$ und damit den Endpunkt eines möglichen Simulations- oder Schätzintervalls dar. Im CIR++ Modell nach [BM01] geschieht die exakte Kalibrierung an eine Eingangszinsstrukturkurve über eine Korrekturfunktion $\phi(t, T)$, die von der Eingangszinsstrukturkurve abhängt und daher ebenfalls nur für den beobachteten Laufzeitbereich definiert ist. Langfristige Simulationen im Hull-White Modell benötigen also einen Ansatz zur Fortschreibung der Zinsstrukturkurve über die am Markt beobachtbaren Laufzeiten hinaus, für Simulationen über lange Zeiträume hinweg muss der Anwender also einen Trend der Shortrate unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} festlegen.

5. Tatsächlich setzt das Problem einer notwendigen Fortschreibung der Eingangszinsstrukturkurve beziehungsweise des Gleichgewichtsniveaus des Hull-White Modells schon bei Laufzeiten ab 10 Jahren ein mit der Frage nach der Liquidität dieser Anleihen und der Frage nach Behandlung des Knicks der Zinsstrukturkurve. Zwischen 20 und 30 Jahren Laufzeit wechselt bei der Zinsstrukturkurve amerikanischer Staatsanleihen die Steigung das Vorzeichen, Zinsstrukturkurven zeigen einen Knick: Der 20-Jahres Zinssatz lag zwischen 1984 und 2008 um durchschnittlich 14.5 Basispunkte über dem 30-Jahres Zinssatz. Auch im Falle britischer Staatsanleihen sowie Inflations-indexierter, langlaufender Staatsanleihen in den USA sowie im Vereinigten Königreich zeigt sich dieser Knick. Für deutsche Staatsanleihen liegen Daten für diese Laufzeiten nicht vor, bei Fortschreibung der deutschen Zinsstrukturkurven über 20 Jahre hinaus geht man in Anwendungen allerdings ebenfalls von einem Knick aus. Wird das Hull-White Modell an am Markt beobachtete Zinsdaten mit langen Laufzeiten kalibriert, resultiert der beobachtbare Knick in einem langfristig fallenden Gleichgewichtsniveau, siehe auch Abbildung 5. Das Hull-White Modell hängt daher über die Eingangszinsstrukturkurve unter Umständen sehr stark ab von einer Eigenschaft der Zinsstrukturkurve, die es in weiteren Simulationen nicht selbst replizieren kann.

3.3.5 Spezielle Probleme bei der Kalibrierung und Schätzung des Cairns Modells

Für das Cairns Modell ergeben sich ebenfalls Probleme den Einfluss der Eingangszinsstrukturkurve sowie die vorhandenen Daten betreffend.

1. Das Cairns Modell kennt die zuletzt diskutierten Probleme des Hull-White Modells, die unter Umständen eine Festlegung des Gleichgewichtsniveaus abseits von der Kalibrierung an Marktdaten nötig machen, nicht: Im Cairns Modell ist stets eine Rückkehr zu „normalen“ Zinsszenarien möglich. Allerdings bestimmt der Anfangszustand X_0 im Cairns Modell den Anfangszustand des stochastischen Gleichgewichtsniveaus $V(0)$. Damit ist analog zum Hull-White Modell der langfristigen Trend durch die Kalibrierung festgelegt.
2. Ein Problem des Cairns Modells liegt im approximativen Charakter der Kalibrierung. Die Abweichung von der Eingangszinsstrukturkurve ist allerdings klein, wie man wiederum in Tabelle 1 erkennt. Der Kalibrierungsalgorithmus ist weiterhin nicht deterministisch, da der oben geschilderte Minimierungsalgorithmus für gewöhnlich von der Wahl des Startpunktes abhängt.
3. Im Cairns Modell ist auch die Abbildung des Knicks der Zinsstrukturkurve am langen Ende möglich, was Bedeutung haben könnte bei Simulationen von Anleiheportfolios mit sehr hoher Duration. Der Parameter β des Cairns-Modells lässt sich als Grenzwert $\lim_{T \rightarrow \infty} y(t, T)$ betrachten. Um das lange Ende der Zinsstrukturkurve mit dem Cairns Modell realistisch zu schätzen, benötigt man Daten entsprechender Laufzeiten. Beinhalten die Schätzdaten den Knick am langen Ende der Zinsstrukturkurve, fällt der geschätzte Wert von β deutlich niedriger aus als bei Schätzdaten ohne diesen Knick. Die Marktdaten wenig liquider Anleihen bestimmen also die Schätzung eines wichtigen Modellparameters. Für die deutsche Zinsstrukturkurve liegen die dabei notwendigen Daten nicht vor. In Ein-Faktor-Shortrate-Modellen ist eine Realisierung des Knicks im Zeitablauf im Allgemeinen nicht möglich, da hier der Slope eine affine Funktion der Shortrate mit konstanter Steigung ist.
4. Im Hull-White Modell, aber auch in anderen Ein-Faktor-Modellen wie Vasicek, CIR und CIR++, entspricht jeder Shortrate genau eine Zinsstrukturkurve. Bei einer Schätzung der Parameter von Ein-Faktor-Modellen reichen deshalb kurzfristige Kassazinsen oft aus, da Slope und Curvature ansonsten als Störungen eingehen. Dagegen benötigen Mehr-Faktor-Modelle wie das Cairns Modell Daten über die gesamte Breite der Zinsstrukturkurve zur Schätzung. Die benötigte Datenmenge steigt also mit den zu schätzenden Faktoren. Weiterhin besteht durch die zusätzlichen Parameter eines Mehr-Faktor-Modells auch die Gefahr eines Overfittings.

4 Anwendung

Der Vergleich von Zinsmodellen kann einerseits anhand ihrer Eigenschaften erfolgen, wie in Kapitel 3, andererseits durch die Anwendung der Modelle in der Bewertung bestimmter Zahlungsansprüche. Im ersten Fall steht die Dynamik des Modells sowie die möglichen Formen der Zinsstrukturkurve im Mittelpunkt. Im zweiten Fall wird untersucht, wie sich Unterschiede in den Modellen auf konkrete Bewertungsaufgaben aus der Praxis oder auf Hedgingstrategien, die mit den einzelnen Modellen entwickelt werden, auswirken.

Im Versicherungsbereich liegt die gewünschte Anwendung u.a. in der Bewertung äußerst komplexer, langlaufender Zahlungsverpflichtungen. Diese Zahlungsverpflichtungen sind von der Dynamik der gesamten Zinsstrukturkurve abhängig, umfassen dabei Merkmale von Zinsderivaten (Garantiezins) und haben keinen am Markt beobachtbaren Wert. Das klare Kriterium eines Bewertungsfehlers entfällt also bei der Bewertung von Versicherungsprodukten. Der konkrete Einfluss bestimmter theoretischer Eigenschaften von Zinsmodellen, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurden, lässt sich für die komplexen Anwendungen im Versicherungsbereich normalerweise nicht absehen. Ein Vergleich von Zinsmodellen in konkreten Anwendungen ist also ebenfalls notwendig.

Im vorliegenden Fall wurden das Hull-White Modell und das Cairns Modell zur Bewertung eines garantierten Rentenfaktors verwendet. Wir betrachten den Fall eines Einmalbeitrages der Höhe B_0 eines Versicherungsnehmers mit dem Eintrittsalter x . Die Fondsentwicklung bis zum Ende der Aufschubdauer T sei gegeben durch $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$. Der Einmalbeitrag B_0 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Fonds investiert und wächst bis zum Ende der Aufschubdauer auf den Wert $B_0 S_T / S_0$ an. Bezeichnen wir bei Rentenbeginn den garantierten Rentenfaktor mit γ ; (d.h. 1 Fondswert entspricht einer Rente in Höhe von γ), so ergibt sich der Marktwert der garantierten Rente zum Zeitpunkt $t = T$ mit Hilfe der Zerobondpreise $P(T, T + j)$ und der Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_j p_{x+T}$ zu

$$B_0 \frac{S_T}{S_0} \gamma \sum_{j=1}^{\omega-x-T} P(T, T + j) {}_j p_{x+T}, \quad (14)$$

wobei mit ω das Endalter der Sterbetafel gegeben ist. Die Option aus Sicht des Versicherungsnehmers besteht nun gerade darin, dass der Wert der garantierten Rente zum Ende der Aufschubphase das vorhandene Fondsvermögen übersteigt. Das Auszahlungsprofil der Option ist also gegeben durch

$$H_T = \max \left(B_0 \frac{S_T}{S_0} \gamma \sum_{j=1}^{\omega-x-T} P(T, T + j) {}_j p_{x+T} - B_0 \frac{S_T}{S_0}, 0 \right). \quad (15)$$

Mit stochastischer Fondspreisentwicklung $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ und stochastischer Entwicklung $(r_t)_{t \geq 0}$ der Shortrate ergibt sich der Preis der Option zum Zeitpunkt $t = 0$ unter dem risikoneu-

tralen Maß Q zu

$$\pi_0^{EB}(H_T) = E^Q \left[e^{-\int_0^T r_u du} B_0 \frac{S_T}{S_0} \max \left(\gamma \sum_{j=1}^{\omega-x-T} P(T, T+j)_j p_{x+T} - 1, 0 \right) \right]. \quad (16)$$

Den Rentenfaktor, der sich unter Verwendung des aktuellen Rechnungszinses ($i=2.25\%$) und der aktuellen Sterbetafel ergibt, wird mit γ_0 bezeichnet, d.h. es gilt nach dem Äquivalenzprinzip $\gamma_0 \sum (1+i)^{-j} p_{x+T} = 1$. Ausgehend davon werden die Optionsgebühren für verschiedene Rentenfaktoren γ in Prozent von γ_0 untersucht. Insbesondere entspricht damit ein Garantieniveau von 100% des Rentenfaktors einem garantierten Rechnungszins von 2,25% im Rentenbezug. Die Sterbetafel wird in den Rechnungen fixiert. Daher bedeutet eine Absenkung des Garantieniveaus eine Reduktion der Zinsgarantien während der Rentenphase.

Neben der Verwendung des entsprechenden Zinsmodells wurde für die Modellierung der Fondspreisentwicklung das Black-Scholes-Modell verwendet. Beide Zinsmodelle wurden an vergleichbaren Eingangszinsstrukturkurven kalibriert. Der Wert des garantierten Rentenfaktors wurde mittels eines Monte Carlo Ansatzes berechnet.

4.1 Berechnung von Sensitivitäten

Für das Risikomanagement ist die Änderung des Wertes eines Zahlungsstromes infolge einer Änderung des Zinsniveaus von besonderer Bedeutung. Untersucht wird dabei die Auswirkung eines Schocks in der Zinsstrukturkurve auf den Wert etwa eines Versicherungsvertrages oder eines ganzen Bestandes von Verträgen.

Die Durchführung der Sensitivitätsberechnung bezüglich einer Zinsänderung von Kurve Y_1 zu Kurve Y_2 erfolgt über die Kalibrierung der Modelle an die beiden angenommenen Eingangszinsstrukturkurven Y_1 und Y_2 in $t = 0$ und Berechnung des Wertes des Zahlungsstromes. Offensichtlich spielt damit die Frage der Kalibrierbarkeit beim Modellvergleich über Sensitivitätsberechnung eine wichtige Rolle. Ein weiteres Problem stellt die Umsetzung eines Zinsschocks dar. Die im folgenden dargestellten Probleme und Lösungen lassen sich auch auf andere Zinsmodelle übertragen.

4.1.1 Modellierung von Zinsschocks

Eine wichtige Frage betrifft die Modellierung des Zinsschocks. Wir werden hier ausschließlich Parallelverschiebungen von Zinsstrukturkurven verwenden. Eine Parallelverschiebung entspricht einem Level-Schock nach Litterman und Scheinkman [LS91]. Parallelverschiebungen erfassen die Dynamik der Zinsstrukturkurve daher nur zum Teil. Gerade für das Risikomanagement ist zu beachten, dass die negative Korrelation von Level und Slope für Level-Schocks im Schnitt gegenläufige Slope-Schocks bewirkt, dass also ein Level-Schock am kurzen Ende der Zinsstrukturkurve am langen Ende gedämpft wird. Sensitivitäten aufgrund von Parallelverschiebungen neigen also dazu, die Änderungen der Zinsstrukturkurve

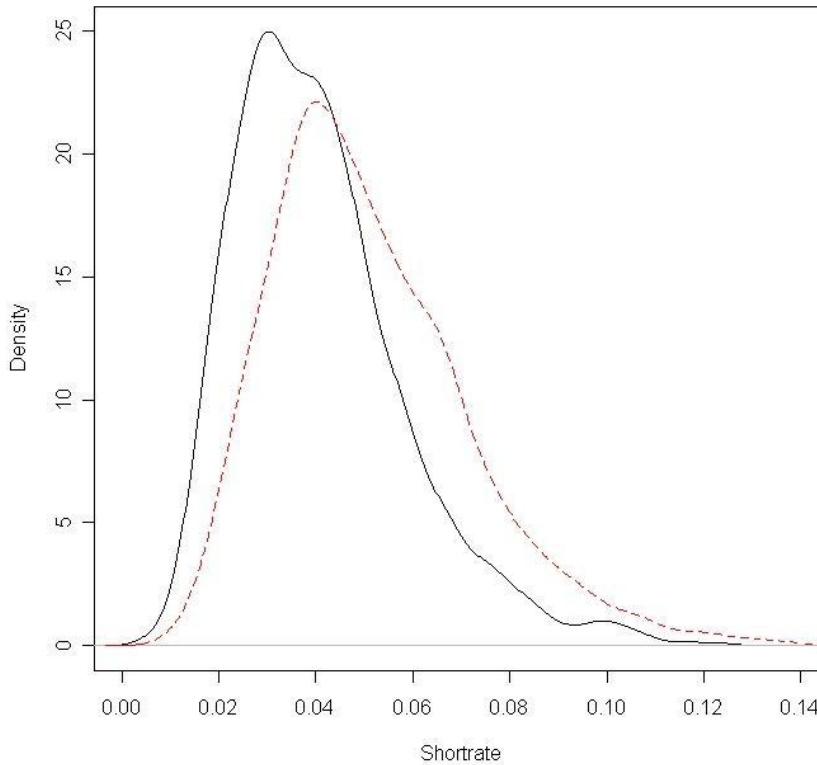


Abbildung 2: Dichteplots von simulierten Cairns-Shorrrates in $t = 30$, angepasst in $t = 0$ an flache Eingangszinsstrukturkurven bei 4% (durchgezogene Linie) und 5%.

am langen Ende zu überschätzen.

Eine zweite Frage betrifft die Umsetzung eines Schocks im konkreten Modell. In der vorliegenden Arbeit wird ein Schock der Zinsstrukturkurve als Schock der Eingangszinsstrukturkurve modelliert, das heißt man vergleicht ein gegebenes Modell kalibriert an die Ursprungskurve Y mit einem weiteren Modell kalibriert an die parallelverschobene Zinsstrukturkurve Y' . In vielen Modellen, so auch im Cairns-Modell, entsprechen solche Schocks einem geänderten Startpunkt des Zustandsprozesses X_0 . Im Hull-White Modell dagegen geht ein solcher Schock einerseits wiederum in einen geänderten Startpunkt des Zustandsprozesses $r(0)$ ein, andererseits ändert sich die aktuell beobachtbare Zinsstrukturkurve und damit das langfristige Mittel $\theta(t)/a$. Ein Schock im Laufzeitbereich $[T_1, T_2]$ ändert damit nachhaltig das langfristige Mittel der Shorrrate im zukünftigen Zeitraum $[T_1, T_2]$. Im Cairns-Modell wirkt jeder Schock auf die Startpunkte X_0 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $dX_t = \alpha(V(t) - X_t)dt + dW_t^Q$, also insbesondere ebenfalls auf das stochastische langfristige Mittel $V(t)$. Die langfristigen Folgen für die Modelldynamik sind allerdings nicht so leicht ablesbar wie im Hull-White Modell. Die Abbildungen 2 und 3 zeigen die Dichten der Shorrrate beider Modelle 30 Jahre in der Zukunft – simuliert im Falle des Cairnsmodells, berechnet im Falle des Hull-White Modells.

Beide Modelle zeigen eine dauerhafte Änderung der Shorrrateverteilung unter dem risi-

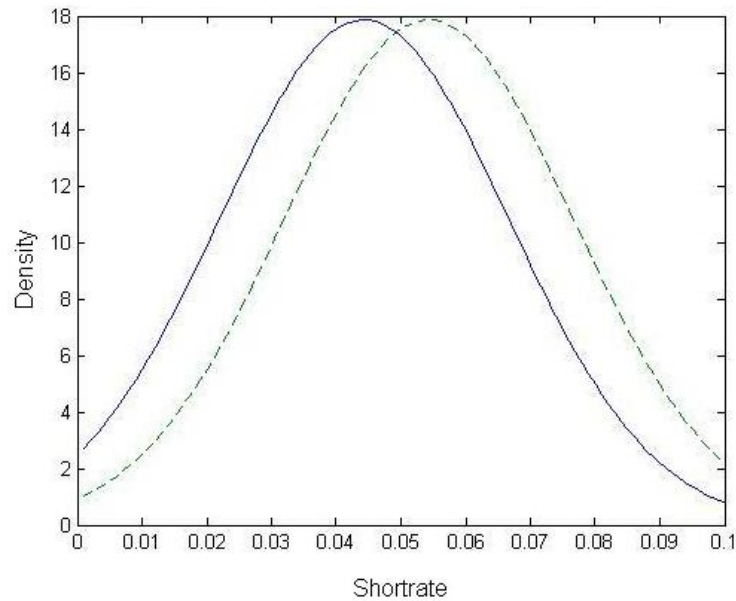


Abbildung 3: Dichteplots der Shorrateverteilung des Hull-White Modells in $t = 30$, angepasst in $t = 0$ an flache Eingangszinsstrukturkurven bei 4% (durchgezogene Linie) und 5%.

koneutralen Maß \mathcal{Q} im Falle einer Parallelverschiebung flacher Eingangszinsstrukturkurven und in beiden Modellen verschiebt sich der Mittelwert der Shorrateverteilung. Modelliert man einen Schock analog als Parallelverschiebung der Eingangszinsstrukturkurve in einem gegebenen Vasicek- [Vas77] oder Cox-Ingersoll-Ross Modell [CIR85], ändert sich der langfristige Mittelwert der Shorrateverteilung nicht, da lediglich der Startpunkt des Shorrateprozesses $r(0)$ neu kalibriert wird. Die weiteren Modellparameter, wie das Gleichgewichtsniveau μ , bleiben aber konstant. Sollen die beiden letztgenannten Modelle mit einem Hull-White Modell anhand einer Parallelverschiebung der Eingangszinsstrukturkurve „fair“ verglichen werden, erfordert eine analoge Kalibrierung daher auch eine Verschiebung der konstanten langfristigen Mittelwerte μ dieser beiden Modelle.

Die Fragen der Umsetzung eines Schocks und der Dauer von Nachwirkungen eines Schocks ist von essentieller Bedeutung bei der Berechnung von Sensitivitäten auf aktuelle Zinsänderungen. Es stellt sich dabei die grundsätzliche Frage, welchen Einfluss die heutige Zinsstrukturkurve aus Modellierungssicht auf die Verteilung der Zinsstrukturkurve mehrere Jahre in der Zukunft haben sollte. Bei der konkreten Anwendung ist darauf zu achten, inwieweit die Auswahl des Zinsmodells im Zusammenhang mit der Modellierung des Zinsschocks die Ergebnisse bestimmt, bei Modellvergleichen ist darauf zu achten, dass Unterschiede schon durch die Modellierung des Schocks und deren unterschiedliche Auswirkungen entstehen können.

Eingangskurve	3%	4%	5%	6%
Abweichung [Bp]	14	6	17	116

Tabelle 2: Maximale Abweichungen in Basispunkten der Cairns Approximationen von den Eingangszinsstrukturkurven, an die kalibriert wurde.

4.1.2 Unterschiedliche Kalibrierbarkeit

In beiden Modellen bestimmt die Kalibrierung an die Eingangszinsstrukturkurve nachhaltig die weitere Dynamik in Simulationen. Um einen Unterschied der betrachteten Modelle infolge der Kalibrierbarkeit zu identifizieren, werden wir das Cairns-Modell wie in Kapitel 3.3 an eine Eingangszinsstrukturkurve kalibrieren und dann zwei Hull-White Modelle betrachten:

1. ein Hull-White Modell kalibriert an die gleiche Eingangszinsstrukturkurve wie das Cairns-Modell
2. ein Hull-White Modell kalibriert an die Cairns-Approximation der Eingangszinsstrukturkurve.

Im ersten Fall vergleicht man also Modelle, die an die gleiche Eingangszinsstrukturkurve kalibriert wurden, im zweiten Fall vergleicht man Modelle, die die gleiche Kurve in $t = 0$ aufweisen.

Als Eingangszinsstrukturkurven zur Sensitivitätsberechnung werden jeweils flache Zinsstrukturkurven gewählt mit Laufzeiten bis 30 Jahren. Die Cairns-Approximationen erreichen dabei keine flachen Zinsstrukturkurven. Insbesondere scheint der geschätzte, sehr niedrige Wert für den Parameter β den in realen Daten beobachtbaren Knick auch in den kalibrierten Kurven nachzubilden. Somit weisen die Zinsstrukturkurven des Cairns Modells für hohe Laufzeiten fallende Zinsen auf. Die Cairns-angepassten Kurven in Abbildung 4 bilden auch keine exakten Parallelverschiebungen, während im Hull-White Modell bei Verwendung der flachen Eingangszinsstrukturkurven eine echte Parallelverschiebung stattfindet.

Für die Berechnung von Sensitivitäten eines Zahlungsanspruchs in Kapitel 4.3 wird 30 Jahre in die Zukunft simuliert, Tabelle 2 gibt die maximalen Abweichungen in Basispunkten der Cairns-Approximationen von den flachen Eingangszinsstrukturkurven an. Insbesondere im Falle einer hohen Eingangszinsstrukturkurve von 6% erkennt man deutlich die möglichen Schwierigkeiten, den Anfangszustand eines Mehr-Faktor-Modells an eine gegebene Zinsstrukturkurve anzupassen. Der Unterschied zwischen dem Gleichgewichtsniveau des Hull-White Modells mit flacher Eingangszinsstrukturkurve und dem Gleichgewichtsniveau mit Cairns-angepasster Eingangszinsstrukturkurve ist allerdings deutlich größer. Abbildung 5 zeigt die Änderung des Gleichgewichtsniveaus des Hull-White Modells für Parameter $a = 0.1$ und $a = 0.05$ und eine flache Eingangszinsstrukturkurve bei 4%. Bei den

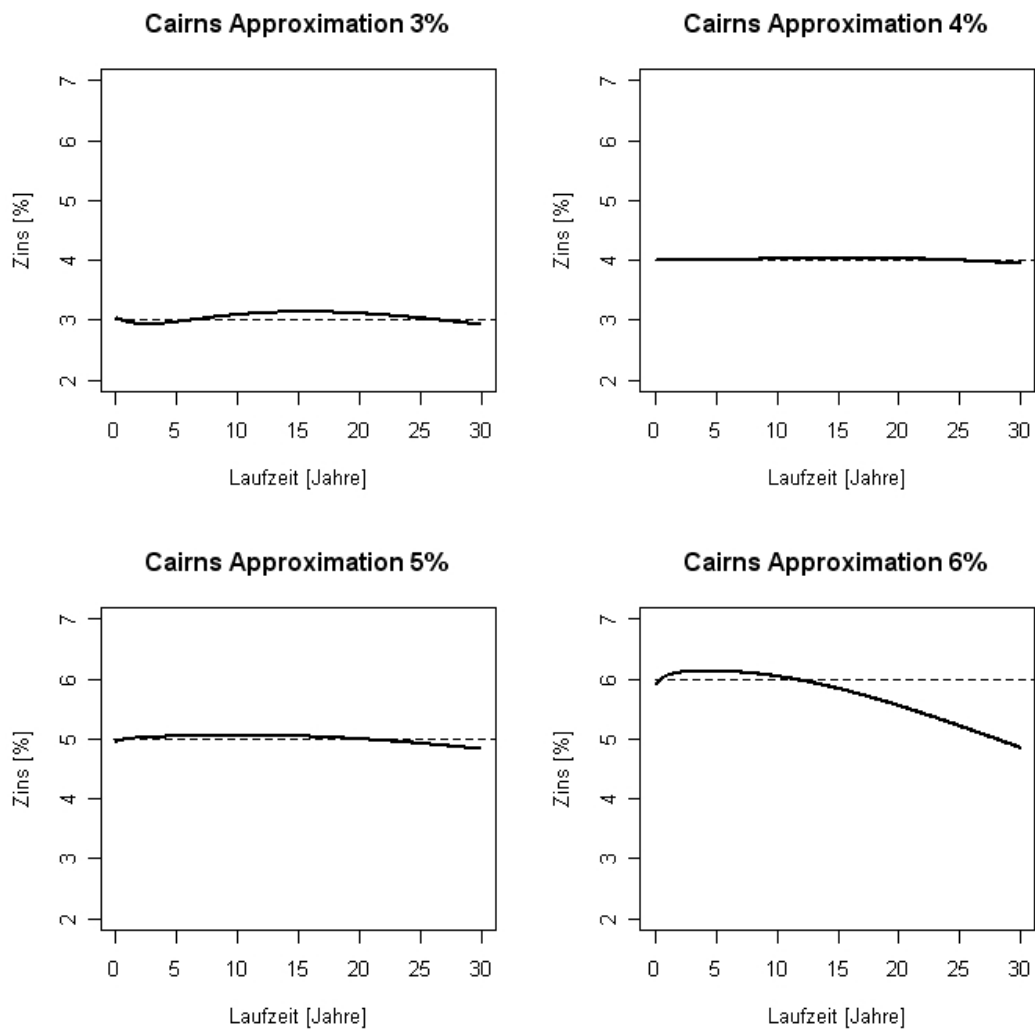


Abbildung 4: Flache Eingangszinsstrukturkurven und ihre jeweiligen Cairns-Approximationen

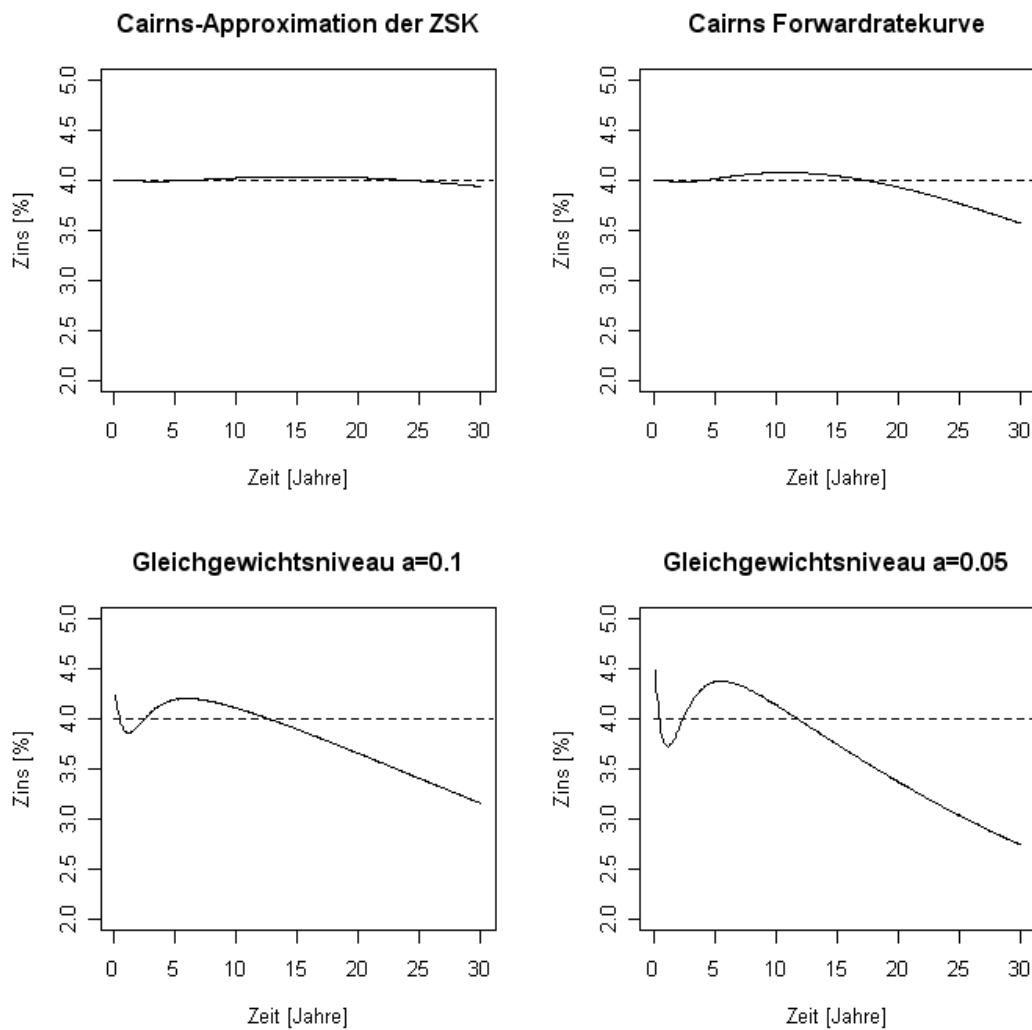


Abbildung 5: Vergleich der Hull-White Gleichgewichtsniveaus bei Anpassung an eine flache Eingangszinsstrukturkurve (gestrichelte Linie) bei 4% beziehungsweise an die jeweilige Cairns-Approximation. Im Falle einer flachen Eingangszinsstrukturkurve entspricht diese dem implizierten Gleichgewichtsniveau.

beiden Hull-White Modellen ergeben maximal 6 Basispunkte Abweichung zwischen Cairns-Approximation als Eingangszinsstrukturkurve und flacher Eingangszinsstrukturkurve einen Unterschied in den implizierten Gleichgewichtsniveaus von bis zu 84 beziehungsweise 126 Basispunkten, je nach verwendetem Parameter a . Schon relativ kleine Veränderungen in der Art der Interpolation der Zinsdaten beziehungsweise bei der Approximation dieser Zinsdaten an die am Markt beobachteten Kuponanleihepreise können so deutliche Änderungen im Gleichgewichtsniveau zur Folge haben. Zum Vergleich: Im langjährigen Durchschnitt liegt die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Monatsendbeobachtungen des deutschen 10-Jahres-Zinses bei etwa 19 Basispunkten, im Maximum bei 124 Basispunkten. Da das Gleichgewichtsniveau die langfristige Dynamik unter dem Hull-White Modell entscheidend beeinflusst, kann man von einer hohen Instabilität bei Schätzungen infolge geänderter Eingangszinsstrukturkurven ausgehen.

Von besonderer Bedeutung für die späteren Bewertungsergebnisse ist, dass der am Markt beobachtbare Knick in der Zinsstrukturkurve zu niedrigen und fallenden Gleichgewichtsniveaus am Ende langjähriger Simulationszeiträume führt. Insbesondere bei der Bewertung von Floors oder Produkten mit Mindestverzinsung steigt also mit dem Simulationszeitraum die Wahrscheinlichkeit niedriger und auch negativer Zinsen bei Anpassung des Hull-White Modells an Marktdaten.

Insgesamt ergeben sich große Unterschiede bei der Kalibrierung der Modelle an einen bestimmten Startzustand. Gerade Mehr-Faktor-Modelle erlauben im Allgemeinen keine exakte Kalibrierung, beim Vergleich verschiedener Mehr-Faktor-Modelle ist also zu beachten, dass die jeweils gewählten Anfangszustände unter Umständen deutlich voneinander abweichen können, auch wenn die von den Modellen implizierten Zinsstrukturkurven nur geringe Unterschiede zeigen. Zu beachten ist auch, dass Kalibrierungsalgorithmen häufig keinen eindeutigen Anfangszustand errechnen.

4.2 Innovationen

Eine einfache Möglichkeit, die Vergleichbarkeit der Preise verschiedener Modelle zu vergrößern, beruht auf der Verwendung ähnlicher Innovationen in den Monte-Carlo Simulationen für die Bewertung. Die zugrunde liegende Idee ist, dass angepasste Innovationen der Zinsstrukturkurve in beiden Modellen bei Kalibrierung an die gleiche Eingangszinsstrukturkurve zumindest am Anfang des Simulationszeitraumes zu ähnlichen Zinsstrukturkurven führen. Insbesondere sollte dieser Ansatz die notwendige Anzahl von Monte-Carlo Simulationen vermindern.

Besonders einfach lässt sich die Anpassung der Innovationen bei Ein-Faktor-Shortratemodellen umsetzen, in denen identische Innovationen für alle untersuchten Modelle verwendet werden können. Das besondere Problem dieser Arbeit liegt im Vergleich eines Ein-Faktor-Modells mit einem Zwei-Faktor-Modell. Um die zweidimensionalen Cairns-Innovationen des Zustandsvektors X in Shortrateinnovationen für das Hull-White Modell

umzurechnen wird ein einfacher Regressionsansatz verwendet. Die Shortrate bei Cairns $r^C(t)$ ist eine nichtlineare Funktion des Zustandsvektors $X = (X_1(t), X_2(t))^T$, dessen Dynamik simuliert wird mit unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen $(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2)^T$. Der Regressionsansatz bezieht die simulierten Shortrateinnovationen des Cairns Modells $\epsilon_t^{r,C} = r^C(t) - r^C(t-1)$ auf die der Dynamik des Zustandsvektors zugrunde liegenden unabhängigen Zufallsvariablen $(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2)$

$$\epsilon_t^{r,C} = \beta_1 \epsilon_t^1 + \beta_2 \epsilon_t^2 + \eta. \quad (17)$$

Das beschriebene Vorgehen ließe sich auch in anderen Modellvergleichen schnell umsetzen. Da bei Mehr-Faktor-Modellen die einzelnen Komponenten der geschätzten Faktorprozesse typischerweise Level und Slope beschreiben, lassen sich die entsprechenden Innovationen in diesem Fall meist einfach zuordnen. Weiterhin lässt sich der oben beschriebene Ansatz zu einem Vektor-Autoregressions-Ansatz erweitern zum Vergleich verschiedener Mehr-Faktor-Modelle.

In Abbildung 6 zeigt sich anhand eines Beispiels zweier mit angepassten Innovationen simulierter Pfade, dass die Unterschiede zwischen den Shortrates der beiden Modelle – weitgehend unabhängig von den verwendeten Hull-White Parametern – in den ersten Jahren eher gering sind und sich erst danach vergrößern. Dabei lassen sich zwei Szenarien identifizieren, die besonders große Abweichungen implizieren: zum einen sehr hohe Shortrates über längere Zeiträume im Cairns-Modell, zum andere sehr niedrigen Shortrates über längere Zeiträume im Cairns-Modell wie in der ersten Abbildung. In beiden Fällen “normalisiert” sich die Shortrate bei Hull-White infolge der Mean Reversion schneller als beim Cairns Modell. Der wesentliche Vorteil des Cairns Modells unter dem physischen Maß setzt sich also unter dem risikoneutralen Maß fort: Cairns erlaubt längere Phasen sehr hoher Zinsen und längere Phasen sehr niedriger Zinsen. Die Verwendung der gleichen Innovationen führt dazu, dass die Unterschiede zwischen beiden Modellen bezüglich der Dauer von Hoch- beziehungsweise Niedrigzinsphasen deutlicher zu Tage treten.

4.3 Resultate

Beide betrachteten Modelle wurden verwendet, um den Wert der Option zu bestimmen, der sich aus einem garantierten Rentenfaktor ergibt. Zusätzlich wurden Sensitivitäten des Optionspreises gegenüber Zinsänderungen untersucht.

Die Berechnung erfolgte exemplarisch an einem Mustervertrag mit einem Einmalbeitrag bei einer Ansparphase von 30 Jahren. Der Optionswert wurde für verschiedene Garantieniveaus (80%, 90% bzw. 100% des sich für einen Rechnungszins von 2,25% ergebenden Rentenfaktors) in Prozent des Einmalbeitrags bestimmt. Die Fondsentwicklung während der Ansparphase folgt dem Black-Scholes Modell mit einer Volatilität von 20%. Die Drift des Black-Scholes Modells ergibt sich aus der Shortrate des jeweiligen Zinsmodells unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} . Aspekte abseits des verwendeten Zinsmodells sind konstant.

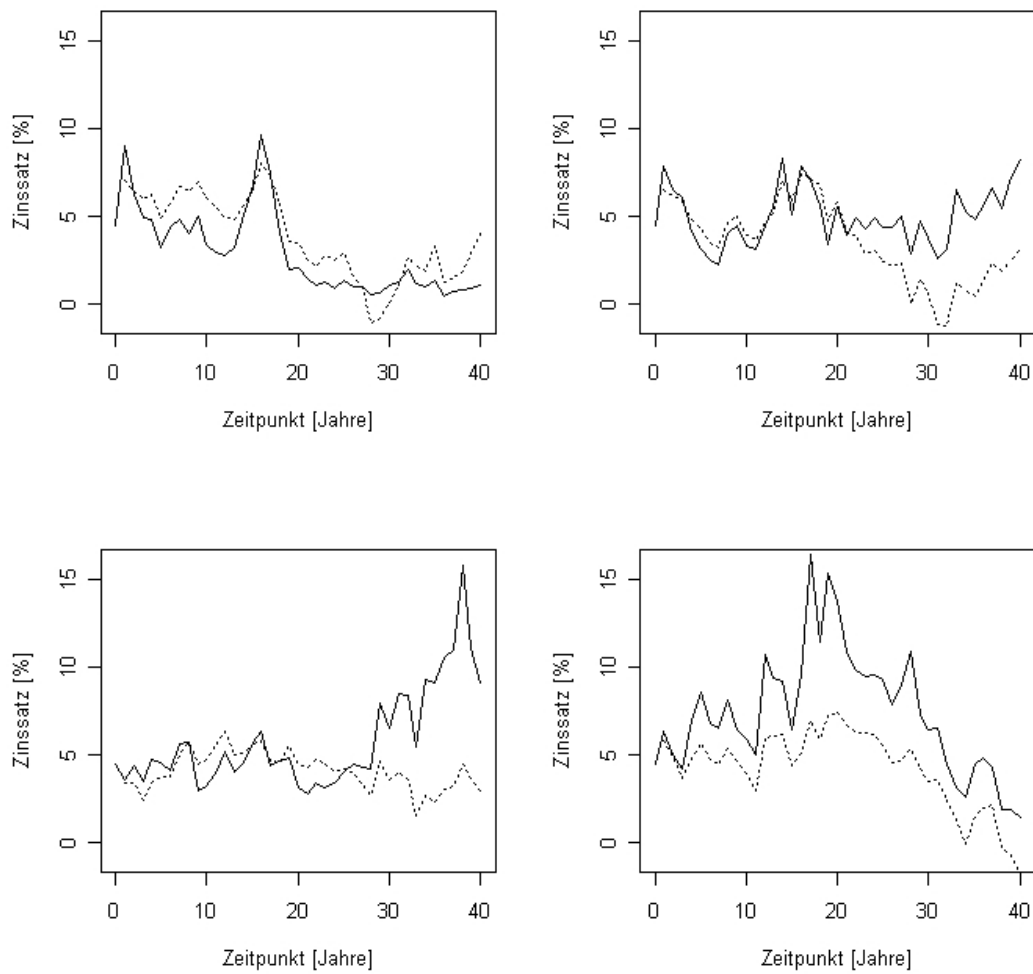


Abbildung 6: Beispiele für Pfade des Hull-White Modells (gestrichelt) und des Cairns Modells mit angepassten Innovationen.

Es wurden die Preise unter dem geschätzten Cairns Modell sowie unter dem geschätzten Hull-White Modell per Monte Carlo Ansatz mit jeweils 1000 Szenarien bestimmt, jeweils zu Eingangszinsstrukturkurven mit den Niveaus 3%, 4%, 5% und 6%. Da nur das Hull-White Modell diese Kurven exakt nachbilden kann, vergleichen wir das Cairns Modell sowohl mit einem Hull-White Modell, das an die ursprüngliche Eingangszinsstrukturkurve kalibriert wurde, als auch mit einem Hull-White Modell, das an die Cairns-angepasste Kurve kalibriert wurde.

4.3.1 Bewertung des garantierten Rentenfaktors

Die Optionspreise für die Garantie abhängig vom Umfang der Garantie für den Rentenfaktor in Prozent des Einmalbeitrages berechnen sich wie in Tabelle 3 angegeben. Die Resultate der beiden Hull-White Modell mit $a = 0.1$ und $\sigma = 1.5\%$ beziehungsweise $a = 0.05$ und $\sigma = 1\%$ dienen dabei der Sensitivitätsanalyse des Hull-White Modells im Rahmen realistischer Parameterbereiche.

In beiden Modellen beeinflusst eine Änderung in der aktuellen Zinsstrukturkurve signifikant die Höhe des Optionspreises. Dieser fällt mit steigendem Niveau der Eingangszinsstrukturkurve, in einigen Hull-White Modellen bis auf 0%. In beiden Modellen impliziert ein höherer aktueller Zinssatz eine im Schnitt höhere Rendite der Anlagen des Versicherers und damit ein geringeres Risiko, die gegebene Garantie erfüllen zu müssen.

Mit steigender Eingangszinsstrukturkurve fällt dabei der Optionspreis in den Hull-White Modellen für alle untersuchten Parametermengen stärker als der Optionspreis im Cairns Modell. Dies reflektiert die unterschiedliche Wirkung einer sich ändernden Eingangszinsstrukturkurve auf die Shortrateverteilung: Im Cairns Modell ist im Falle einer sehr hohen Eingangszinsstrukturkurve die Wahrscheinlichkeit auch länger dauernder Niedrigzinsphasen höher als bei vergleichbaren Hull-White Modellen. Ein Schock auf die Eingangszinsstrukturkurve im Cairns-Modell ändert die Wahrscheinlichkeit bestimmter Formen der Zinsstrukturkurve, nicht jedoch die Menge der erreichbaren Zinsstrukturkurven wie ein Schock im Hull-White Modell. Namentlich flache Zinsstrukturkurven auf niedrigem Niveau sind im Cairns Modell unter jeder Eingangszinsstrukturkurve weiterhin möglich, während das Hull-White Modell niedrige Shortrates mit steigender Eingangszinsstrukturkurve weitgehend ausschließt. Die Positivität des Cairns Modells beschränkt die Kosten der Garantieunterschreitung, wohl infolge dessen sind die Optionspreise des Cairns Modells bei niedrigen Eingangszinsstrukturkurven kleiner als beim Hull-White Modell. Insgesamt ergibt sich somit für hohe Eingangszinsstrukturkurven im Cairns Modell eine konservativere Bestimmung des Optionspreises, für niedrige Eingangszinsstrukturkurven aber ein niedrigerer Optionspreis im Vergleich zum Hull-White Modell.

Im Hull-White Modell steigen die Optionspreise mit der Volatilität, also mit höherem σ oder niedrigerem a . Insbesondere reflektiert dies die niedrigere Wahrscheinlichkeit der besonders kritischen langanhaltenden Niedrigzinsphasen im Hull-White Rahmen. Niedri-

Modell	Eingangskurve		100%	90%	80%
Cairns		6%	0.32%	0.12%	0.04%
		5%	0.61%	0.23%	0.05%
		4%	1.30%	0.56%	0.14%
		3%	3.42%	1.40%	0.40%
Hull-White, $a = 0.1, \sigma = 1.0\%$	Cairns	6%	0.04%	0.01%	0.00%
		5%	0.15%	0.06%	0.02%
		4%	0.23%	0.04%	0.00%
		3%	1.55%	0.61%	0.19%
	flach	6%	0.00%	0.00%	0.00%
		5%	0.03%	0.00%	0.00%
		4%	0.19%	0.08%	0.02%
		3%	1.22%	0.45%	0.13%
Hull-White, $a = 0.05, \sigma = 1.0\%$	Cairns	6%	0.04%	0.01%	0.00%
		5%	1.50%	1.01%	0.69%
		4%	2.73%	1.68%	0.94%
		3%	6.68%	4.46%	2.82%
	flach	6%	0.26%	0.17%	0.11%
		5%	0.73%	0.48%	0.31%
		4%	2.05%	1.35%	0.90%
		3%	5.98%	3.89%	2.41%
Hull-White, $a = 0.1, \sigma = 1.5\%$	Cairns	6%	0.33%	0.19%	0.11%
		5%	0.76%	0.45%	0.25%
		4%	1.41%	0.65%	0.24%
		3%	4.27%	2.45%	1.32%
	flach	6%	0.09%	0.04%	0.01%
		5%	0.30%	0.17%	0.09%
		4%	1.04%	0.59%	0.31%
		3%	3.69%	2.06%	1.08%

Tabelle 3: Errechnete Optionspreise für die Garantie von 100%, 90% oder 80% des Rentenfaktors bei einer Laufzeit der Rentenversicherung von 30 Jahren für das Cairns Modell mit Parametern $\alpha = (0.62, 0.22)$, $\beta = 0.01$, $\sigma = (0.33, 0.50)$, $\rho = -0.21$ und $\mu = (-1.72, -2.36)$ sowie Hull-White Modelle mit $a = 0.05$, $\sigma = 0.01$, mit $a = 0.1$, $\sigma = 0.01$ und mit $a = 0.1$, $\sigma = 0.015$, jeweils angepasst sowohl an die Cairns-Approximation einer flachen Eingangszinsstrukturkurve als auch an die flache Eingangszinsstrukturkurve selbst.

geres a erhöht die Wahrscheinlichkeit längerfristiger Abweichungen vom Gleichgewichtsniveau, höheres σ erhöht die lokale Varianz und die Wahrscheinlichkeit starker kurzfristiger Ausschläge. Gerade diese kurzfristigen Ausschläge in Zusammenhang mit der fehlenden Nullzinsschranke führen dazu, dass im Hull-White Fall mit hohem σ Marktzinsen häufiger, allerdings nur für kurze Zeit, unter den Garantiezins fallen.

Für jedes betrachtete Hull-White Modell erkennt man einen deutlichen Unterschied zwischen der flachen Eingangszinsstrukturkurve und der Cairns-angepassten Eingangszinsstrukturkurve. Ein Unterschied von etwa 30 Basispunkten in der Eingangszinsstrukturkurve für das Ende des Simulationszeitraumes sorgt also für deutliche Unterschiede bei den Optionspreisen. Den Abbildungen 4 und 5 folgend liegt der Unterschied zwischen beiden Eingangszinsstrukturkurven vor allem am langen Ende, das Hull-White Modell verlangt also besondere Sorgfalt bei der Bestimmung der Eingangszinsstrukturkurve am langen Ende und damit insbesondere bei der Modellierung des Knicks in der Zinsstrukturkurve.

4.3.2 Bewertung des garantierten Rentenfaktors bei Kalibrierung von Zerobondoptionen

Zum weiteren Vergleich wurde das Hull-White Modell noch weiter an das Cairns Modell angepasst. Mit dem geschätzten Cairns Modell wurde zunächst eine Eingangszinsstrukturkurve approximiert, also ein Anfangszustand $X(0)$ bestimmt. Danach wurden, gegeben $X(0)$, mit dem Cairns Modell Preise von Zerobondoptionen in $t = 0$ bestimmt. Verwendet wurden dazu Call-Optionen auf Zerobonds $P(\tau, T)$ mit Ausübungszeitpunkt τ und Payoff $(P(\tau, T) - K)^+$. Im Hull-White Modell sind die Preise dieser Derivate deterministische Funktionen der Eingangszinsstrukturkurve und der Modellparameter. Definiert man nun ein Hull-White Modell mit den ursprünglichen flachen Eingangszinsstrukturkurven oder deren Cairns-Approximationen, legen die zusätzlichen Optionspreise alle Modellparameter fest. Die so erhaltenen Hull-White Modelle zeigen also in $t = 0$ die größtmögliche Übereinstimmung mit dem gegebenen Cairns Modell. Insbesondere wurde durch dieses Vorgehen nicht nur die Eingangszinsstrukturkurve angeglichen, sondern über die Verwendung der Preise von Zerobondoptionen zur Anpassung und die Verwendung angepasster Innovationen auch die Dynamik der Modelle unter \mathcal{Q} . Tabelle 4 zeigt die Modellparameter so angepasster Hull-White Modelle sowie die jeweiligen Werte für einen garantierten Rentenfaktor. Auffällig ist das sehr niedrige Gleichgewichtsniveau a in den angepassten Werten. Die Anpassung an das Cairns Modell impliziert also niedrigere Mean Reversion. Niedrigere Volatilitätsparameter σ vermindern lediglich die lokale Schwankungsbreite. Die niedrigeren Mean-Reversion Parameter bedeuten insbesondere eine höhere Wahrscheinlichkeit längerer Abweichungen vom langfristigen Mittel, wie sie das Cairns-Modell für die Shortrate zulässt. Die weiter gehende Kalibrierung über Zerobondoptionen führt also zu einem Hull-White Modell, welches die Möglichkeit längerfristiger Hoch- und Niedrigzinsszenarien im Cairns Modell nachbildet, wo diese stärkeren Abweichungen zu deutlich höheren Preisen führen

Eingangszinsstrukturkurve	Garantieanteil	100%	90%	80%
Cairns Modell mit 5% Eingangskurve: Hull-White Modell mit $a = 0.0286$, $\sigma = 0.91\%$				
Cairns-Approximation		3.43%	2.56%	1.91%
Flache Eingangszinsstrukturkurve		1.89%	1.39%	1.03%
Cairns Modell mit 4% Eingangskurve: Hull-White Modell mit $a = 0.0274$, $\sigma = 0.82\%$				
Cairns-Approximation		4.25%	2.94%	1.94%
Flache Eingangszinsstrukturkurve		3.34%	2.38%	1.67%

Tabelle 4: Werte des Optionspreises für die Garantie eines Rentenfaktors bei Anpassung der Hull-White Modelle an im Cairns-Modell berechnete Zerobondoptionspreise.

Cairns	100%	90%	80%
Mittelwert	1.02%	0.40%	0.10%
Standardabweichung	0.12%	0.05%	0.02%
Hull-White	100%	90%	80%
Mittelwert	0.88%	0.43%	0.19%
Standardabweichung	0.20%	0.16%	0.11%

Tabelle 5: Vergleich der Stabilität der Bewertungsergebnisse von Monte-Carlo Durchläufen des Cairns Modells und des Hull-White Modells (0.1,1.5%) mit Cairns Approximation einer 4.5% Eingangszinsstrukturkurve.

als im Cairns Modell, an das kalibriert wurde. Ein wesentlicher Grund hierfür dürfte in der höheren Wahrscheinlichkeit negativer Zinsen im kalibrierten Hull-White Modell - auch über längere Zeiträume - liegen.

4.3.3 Stabilität der Ergebnisse

Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt beim Modellvergleich liegt in der Stabilität der Ergebnisse. Generell ist zu erwarten, dass flexiblere Modelle eine höhere Anzahl Monte Carlo Simulationen verlangen, um stabile Preise zu erhalten. Tatsächlich sind aber die Ergebnisse des Cairns Modells stabiler als die Hull-White Ergebnisse. Tabelle 5 zeigt Mittelwerte und Standardabweichungen von jeweils 8 Bewertungen mit einer Eingangszinsstrukturkurve von 4.5%. Verwendet wurden jeweils das Cairns Modell sowie das Hull-White Modell mit $a = 0.1$ und $\sigma = 1.5\%$ und der Cairns Approximation an die Eingangszinsstrukturkurve.

Als mögliche Erklärung hierfür bietet sich das prinzipiell unbeschränkte Risiko im Hull-White Fall an. Im Cairns Modell ist der Zinssatz nach unten beschränkt, im Hull-White Modell nicht. Der Einfluss extremer Ereignisse auf die Bewertung des garantierten Rentenfaktors ist daher im Cairns Modell beschränkt, während die Kosten einer Unterschreitung im Hull-White Modell unbeschränkt sind und möglicherweise durch negative Shortrates in der Diskontierung an Einfluss noch gewinnen. Insgesamt ist damit die Anwendung des

Hull-White Modells sehr viel anfälliger für extreme Unterschreitungen des Garantiezinses als das Cairns Modell.

5 Zusammenfassung

In der Literatur findet sich eine Vielzahl möglicher Zinsmodelle zur Umsetzung auch in Versicherungsanwendungen, allerdings wird kaum auf spezielle Anforderungen im Versicherungsbereich eingegangen. Lebens- und Rentenversicherungsverträge enthalten biometrische und finanzielle Garantien. Letztere umfassen beispielsweise eingebettete Zinsderivate, die sich aus der im klassischen Bereich üblichen Garantieverzinsung ergeben. Bei der Bewertung der Zinsgarantien ergeben sich durch die typischerweise langen Vertragslaufzeiten besondere Herausforderungen an das verwendete Zinsmodell. Sowohl für die Bewertung der Verpflichtungen als auch für die Modellierung der Kapitalanlage ist eine möglichst realistische Modellierung der Zinskurve über einen sehr langen Zeitraum erforderlich. Die Bewertung der Verpflichtungen benutzt den gesamten Laufzeitenbereich der Zinskurve. Für die Bewertung der Kapitalanlage liefert das kurze Ende den lokalen Diskontierungssatz, während längerfristige Zinssätze zur Beschreibung des Bondsportfolios benötigt werden. Von wesentlicher Bedeutung ist also eine realistische Modellierung der *Form* der gesamten Zinsstrukturkurve sowie deren Dynamik über lange Zeiträume hinweg, insbesondere auch in den für die Bewertung der Garantieverzinsung wichtigen Niedrigzinsszenarien.

Laut Litterman und Scheinkman [LS91] bestimmen drei Faktoren die Dynamik der Zinsstrukturkurve: Level, Slope und Curvature, also Höhe, Steigung und Krümmung der Zinsstrukturkurve. Um sowohl Diskontierungssatz als auch längerfristige Zinsen zu modellieren benötigt man also zumindest zwei stochastische Faktoren, die dem Level und dem Slope entsprechen. Die Einschränkungen eines Ein-Faktor-Modells wurden deutlich anhand des Modells von Hull-White, bei dem der Slope als affine Funktion der Shortrate dargestellt werden kann und damit viele in der Vergangenheit beobachtbare Zinsstrukturkurven ausschließt. Die Ergebnisse von Litterman und Scheinkman haben auch Folgen für die Verwendung von Parallelverschiebungen zur Berechnung von Sensitivitäten von Preisen bezüglich Zinsschocks, da Parallelverschiebungen lediglich Level-Schocks darstellen und damit die Dynamik der Zinsstrukturkurve nur ungenügend widerspiegeln.

Angesichts der Garantieverzinsung bestimmen Niedrigzinsszenarien den Wert der eingebetteten Optionen. Historisch beobachtbare, für die Versicherungsbranche besonders kritische Szenarien sind dabei gekennzeichnet sowohl durch ein niedriges Level, als auch durch einen niedrigen Slope, wie etwa in Japan ab 1999. Eine realistische Abbildung solcher Szenarien erfordert die Positivität der vom betrachteten Modell gelieferten Zinsen, denn die Nullzinsschranke impliziert zum einen eine besondere Dynamik der Zinsstrukturkurve im Niedrigzinzbereich, die sich auch mit der Geldpolitik erklären lassen, zum anderen beschränkt die Nullzinsschranke die Belastungen infolge eines Unterschreitens des Garantiezinses so-

wie einer Aufzinsung zukünftiger Zahlungen infolge negativer Shortrates. Insbesondere im Hinblick auf die Modellierung von Niedrigzinsszenarien wäre wünschenswert, wenn ein verwendetes Zinsmodell positive Zinsen garantierte. Generell geht aber der Ausschluss negativer Zinsen mit erhöhter Komplexität der Modelle einher.

Anhand der Modelle von Hull, White [HW90] und Cairns [Cai04] wurde ein typischer Vergleichsansatz von Anwendern durchgeführt, die Bewertung einer Garantie des Rentenfaktors. Das Cairns Modell liefert dabei eine konservativere Bewertung als das Hull-White Modell für hohe Eingangszinsstrukturkurven, aber niedrigere Werte bei niedrigen Eingangszinsstrukturkurven. Dies lässt sich erklären mit der höheren Flexibilität des Cairns Modells, das auch bei hohen Eingangszinsstrukturkurven lange Niedrigzinsszenarien und bei niedrigen Eingangszinsstrukturkurven lange Hochzinsphasen zulässt sowie durch die Positivität mögliche Kosten durch ein Unterschreiten des Garantiezinses beschränkt. Insgesamt bedurften alle empirischen Ergebnisse allerdings einer weiter gehenden Interpretation, da im Gegensatz zu Bewertungs- und Hedgingfragen von Plain Vanilla Zinsderivaten keine beobachtbaren Marktdaten verfügbar sind. Zinsmodelle wirken in der Anwendung im Versicherungsbereich also in gewissem Sinne als Black Box, da die konkreten Auswirkungen theoretisch wünschenswerter Eigenschaften anhand konkreter Anwendungen nur schwer zu ermitteln sind.

Erschwert wird der Vergleich unterschiedlicher Zinsmodelle noch durch die unterschiedlichen Voraussetzungen für die Verwendung. Das Hull-White Modell lässt sich zwar im Gegensatz zum Cairns Modell exakt an eine gegebene Zinsstrukturkurve kalibrieren, zeigt aber eine hohe Abhängigkeit der gesamten Dynamik von der Eingangszinsstrukturkurve. Diese ist ihrerseits wiederum lediglich Ergebnis einer Approximation der am Markt beobachteten Daten, so dass letztendlich beide Modelle die tatsächlich beobachtbare Marktsituation nur approximieren können. Darüber hinaus kann das Hull-White Modell an Zinsstrukturkurven kalibriert werden, die in Simulationen des Modells nicht erreichbar sind, während sich bei Cairns die Menge darstellbarer Eingangszinsstrukturkurven und die Menge in Simulationen erreichbarer Kurven entsprechen.

Die Schätzung stellt ein weiteres Problem beim Modellvergleich dar, da zum Beispiel Zinsen längerer Laufzeiten die Schätzung des Hull-White Modells stören, für die Schätzung des Cairns Modells aber notwendig sind, so dass die Verwendung der gleichen Informationsmengen für beide Modelle keine vergleichbaren Ausgangsbedingungen für einen Modellvergleich implizieren. Insbesondere stellt sich dabei auch die Frage nach der Stabilität der Schätzungen, da die Zinsmodelle für Simulationen mit mehreren Jahrzehnten Länge verwendet werden sollen und daher etwa neue Beobachtungen am Markt die Modellparameter nur wenig ändern sollten.

Literatur

- [AM08] ALBRECHT, Peter ; MAYER, Christoph: Anwendung des Kalman-Filters zur Identifikation und Projektion von Zinsstrukturmodellen: Modelltheoretische Grundlagen. In: *Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft* (2008). <http://insurance.bwl.uni-mannheim.de/fileadmin/extern/mm/mm173.pdf>
- [BK91] BLACK, Fischer ; KARASINSKI, Piotr: Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal. In: *Financial Analysts Journal* 47 (1991), Nr. 4, S. 52–59
- [BM01] BRIGO, Damiano ; MERCURIO, Fabio: A deterministic-shift extension of analytically-tractable and time-homogeneous short-rate models. In: *Finance and Stochastics* 5 (2001), Nr. 3, S. 369–387
- [BRS04] BERNANKE, Ben S. ; REINHART, Vincent R. ; SACK, Brian P.: Monetary Policy Alternatives at the Zero Bound: An Empirical Assessment / Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.). 2004 (2004-48). – Forschungsbericht
- [Cai04] CAIRNS, Andrew J. G.: A Family of Term-structure Models for Long-term Risk Management and Derivative Pricing. In: *Mathematical Finance* 14 (2004), Nr. 3, S. 415–444
- [CIR85] COX, John C. ; INGERSOLL, Jr. Jonathan E. Jonathan E. ; ROSS, Stephen A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. In: *Econometrica* 53 (1985), Nr. 2, S. 385–407
- [DK96] DUFFIE, Darrel ; KAN, Rui: A Yield-Factor Model of Interest Rates. In: *Mathematical Finance* 6 (1996), Nr. 4, S. 379–406
- [DS00] DAI, Qiang ; SINGLETON, Kenneth J.: Specification Analysis of Affine Term Structure Models. In: *Journal of Finance* 55 (2000), Nr. 5, S. 1943–1978
- [FH96] FLESAKER, Bjorn ; HUGHSTON, Lane: Positive Interest. In: *Risk* 9 (1996), Nr. 1, S. 46–49
- [FMW03] FISCHER, Tom ; MAY, Angelika ; WALTHER, Brigitte: Anpassung eines CIR-1-Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve. In: *Blätter der DGVM* 26 (2003), Nr. 2, S. 193–206
- [FMW04] FISCHER, Tom ; MAY, Angelika ; WALTHER, Brigitte: Anpassung eines CIR-k-Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve. In: *Blätter der DGVM* 26 (2004), Nr. 3, S. 269–387

- [HW90] HULL, John ; WHITE, Alan: Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. In: *Review of Financial Studies* 3 (1990), Nr. 4, S. 573–92
- [Kel01] KELLERHALS, B. P.: *Financial pricing models in continuous time and Kalman filtering*. Springer, 2001. – ISBN 3–540–42364–8
- [LS91] LITTERMAN, Robert ; SCHEINKMAN, Jose: Common Factors Affecting Bond Returns. In: *Journal of Fixed Income* 1 (1991), Nr. 1, S. 54–61
- [Rog95] ROGERS, L.C.G.: Which model for term-structure of interest rates should one use? In: *Mathematical Finance* 65 (1995), S. 93–116
- [Vas77] VASICEK, Oldrich: An equilibrium characterization of the term structure. In: *Journal of Financial Economics* 5 (1977), Nr. 2, S. 177–188