http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 6, 6 pp., *17.12.1999*

Zur Rolle der ideal konvexen Mengen bei der Stabilität der Cauchyschen Funktionalgleichung

Peter Volkmann[1]

1. Es sei E ein (reeller) Banachraum, und es sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Eine Menge $V \subseteq E$ heißt nach Lifšic [2] *ideal konvex*, wenn für beschränkte Folgen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V stets gilt:

$$\text{(1)} \qquad \text{Aus } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \text{ mit } \alpha_n \geq 0 \text{ in } \mathbb{R} \text{ folgt } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n d_n \in V.$$

Man sieht leicht, daß (1) in dieser Definition ersetzt werden kann durch

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n} \in V.$$

2. Es sei $\circ$ eine innere Verknüpfung in einer Menge M. Erfüllt $a : M \to E$ die Cauchysche Funktionalgleichung

$$a(x \circ y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in M),$$

so nennen wir diese Funktion *additiv*. Wie in [3] nennen wir $\circ$ *quadrat-symmetrisch*, falls

$$\text{(3)} \qquad (x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ (y \circ y) \quad (x, y \in M)$$

gilt. Der nachfolgende Satz stammt für kommutative Halbgruppen $(M, \circ)$ von Tabor [4].

Satz 1. *Es sei V eine ideal konvexe, beschränkte Teilmenge des Banachraumes E, und es sei $\circ$ eine quadrat-symmetrische innere Verknüpfung in einer Menge M. Behauptung: Zu jeder Funktion $f : M \to E$, für welche*

$$\text{(4)} \qquad f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in V \quad (x, y \in M)$$

ausfällt, existiert eine eindeutig bestimmte additive Funktion $a : M \to E$ mit

$$\text{(5)} \qquad a(x) - f(x) \in V \quad (x \in M).$$

[1]Anläßlich eines Aufenthaltes an der Universität Katowice im März 1999, gefördert durch Grant No. 2P03A03311 des Komitet Badań Naukowych.

Zum *Beweise* kann ähnlich wie in [5] vorgegangen werden: Für $x \in M$ setze man $x^2 = x \circ x$, und man definiere rekursiv

$$x^{2^{n+1}} = \left(x^{2^n}\right)^2 \quad (n \in I\!N); \tag{6}$$

wegen (3) gilt dann $(x \circ y)^{2^n} = x^{2^n} \circ y^{2^n}$. Nach (4) gelten für $x \in M$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} d_1(x) &= f(x^2) - 2f(x) \in V, \\ d_2(x) &= f(x^4) - 2f(x^2) \in V, \\ d_3(x) &= f(x^8) - 2f(x^4) \in V \text{ etc.} \end{aligned}$$

Analog zu Hyers [1] gibt es wegen der Beschränktheit der Cauchy-Differenzen $f(x \circ y) - f(x) - f(y)$ genau eine additive Funktion $a : M \to E$, so daß $a - f$ beschränkt ist; sie ist gegeben durch die Formel

$$a(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x). \tag{7}$$

Da V ideal konvex ist, gilt also (5).

3. Für beschränkte Teilmengen V von E und $(M, \circ) = (I\!R, +)$ zeigt Tabor [4], daß die Behauptung des Satzes 1 die Konvexität von V nach sich zieht. Dadurch wird das folgende, auf Tabor zurückgehende Problem motiviert.

Problem. Es sei V eine konvexe, beschränkte Teilmenge von E, und die Behauptung des Satzes 1 gelte für alle kommutativen Halbgruppen $(M, \circ)$. Ist V dann ideal konvex?

Dieses Problem bleibt hier ungelöst, aber mit einem geeigneten $(\Omega, \circ)$, wobei $\circ$ eine quadrat-symmetrische innere Verknüpfung in der Menge Ω ist, wird gezeigt:

Satz 2. *Ist V eine konvexe, beschränkte Teilmenge des Banachraumes E und gilt die Behauptung des Satzes 1 für $(M, \circ) = (\Omega, \circ)$, so ist V ideal konvex.*

Die Beschreibung von $(\Omega, \circ)$ erfolgt in Nr. 4; anschließend wird in Nr. 5 ein Lemma bewiesen:

Lemma. *Es sei $(d_n)_{n \in I\!N}$ eine Folge in einer konvexen, beschränkten Teilmenge V von E. Dann existieren $f : \Omega \to E$ und $\alpha \in \Omega$ mit*

$$f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in V \quad (x, y \in \Omega), \tag{8}$$

$$f(\alpha^{2^n}) - 2f(\alpha^{2^{n-1}}) = d_n \quad (n \in I\!N) \tag{9}$$

(α^{2^n} gemäß (6), $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$, $\alpha^1 = \alpha$).

Hieraus ergibt sich Satz 2: Es sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V; wir möchten (2) nachweisen. Dazu wählen wir f und α wie im Lemma. Wegen der in Satz 2 vorausgesetzten Behauptung des Satzes 1 (für $M = \Omega$) gibt es eine (eindeutig bestimmte) additive Funktion $a : \Omega \to E$ mit

$$a(x) - f(x) \in V \quad (x \in \Omega). \tag{10}$$

Nach den Ausführungen in Nr. 2 gilt (7) für alle $x \in \Omega$, und somit bedeutet (10) für $x = \alpha$ gerade das Bestehen von (2) (mit den in (9) auftretenden d_n).

4. Beschreibung von Ω. Als Ω nehmen wir diejenige wohlgeordnete Menge, die durch folgende fünf Eigenschaften (eindeutig) bestimmt wird:

1. $\mathbb{N} \subseteq \Omega$, wobei die Menge $\mathbb{N}$ mit ihrer natürlichen Ordnung versehen ist.

2. Aus $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega\backslash\mathbb{N}$ folgt $n < \omega$.

3. Aus $\omega, \overline{\omega} \in \Omega$ mit $\omega < \overline{\omega}$ folgt $(\overline{\omega}, \omega) \in \Omega$, wobei $(\overline{\omega}, \omega)$ das geordnete Paar von $\overline{\omega}, \omega$ bedeutet.

4. Im Falle $\omega_1, \overline{\omega}_1, \omega_2, \overline{\omega}_2 \in \Omega$ mit $\omega_1 < \overline{\omega}_1$ und $\omega_2 < \overline{\omega}_2$ gilt $(\overline{\omega}_1, \omega_1) < (\overline{\omega}_2, \omega_2)$ genau dann, wenn $\overline{\omega}_1 < \overline{\omega}_2$ ist oder gleichzeitig $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$ und $\omega_1 < \omega_2$.

5. Ω wird durch $\mathbb{N}$ erzeugt (d.h., Ω ist die kleinste Menge mit den vorstehenden Eigenschaften).

Ab jetzt schreiben wir die geordneten Paare kürzer als Produkte,

$$\overline{\omega} \circ \omega = (\overline{\omega}, \omega) \quad (\omega < \overline{\omega}), \tag{11}$$

und später wird $\circ$ zu einer inneren Verknüpfung in Ω erweitert.

Der Anfang von Ω sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
&1, 2, 3, 4, \ldots, 2 \circ 1, 3 \circ 1, 3 \circ 2, 4 \circ 1, 4 \circ 2, 4 \circ 3, 5 \circ 1, \ldots, \\
&(2 \circ 1) \circ 1, (2 \circ 1) \circ 2, \ldots, \\
&(3 \circ 1) \circ 1, (3 \circ 1) \circ 2, \ldots, (3 \circ 1) \circ (2 \circ 1), \\
&(3 \circ 2) \circ 1, (3 \circ 2) \circ 2, \ldots, (3 \circ 2) \circ (2 \circ 1), (3 \circ 2) \circ (3 \circ 1), \\
&(4 \circ 1) \circ 1, \ldots, ((2 \circ 1) \circ 1) \circ 1, \ldots.
\end{aligned}$$

Jedes Element ω von Ω ist ein Produkt von Elementen aus $\mathbb{N}$; deren Anzahl nennen wir die *Länge* $l(\omega)$ von ω. Insbesondere gilt

$$l(n) = 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}, \; l(\overline{\omega} \circ \omega) = l(\overline{\omega}) + l(\omega) \text{ für } \omega < \overline{\omega},$$

und daher können Aussagen für die Elemente von Ω durch Rekursion über deren Länge gewonnen werden.

Wir definieren $t : \Omega \to \Omega$ rekursiv durch

$$\begin{cases} tn = n + 1 \text{ für } n \in I\!N \\ t(\overline{\omega} \circ \omega) = (t\overline{\omega}) \circ (t\omega) \text{ für } \omega < \overline{\omega}. \end{cases}$$

Dann gilt z.B. $l(t\omega) = l(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Das Produkt $\overline{\omega} \circ \omega$ für beliebige $\omega, \overline{\omega} \in \Omega$ wird nun durch (11) gegeben und durch

$$\overline{\omega} \circ \omega = \begin{cases} \omega \circ \overline{\omega} \text{ für } \overline{\omega} < \omega \\ t\omega \text{ für } \overline{\omega} = \omega. \end{cases} \tag{12}$$

Offenbar ist

$$\overline{\omega} \circ \omega = \omega \circ \overline{\omega} \quad (\omega, \overline{\omega} \in \Omega), \tag{13}$$

und es gilt

$$l(\overline{\omega} \circ \omega) = \begin{cases} l(\overline{\omega}) + l(\omega) & (\overline{\omega} \neq \omega) \\ l(\omega) & (\overline{\omega} = \omega). \end{cases}$$

Die Formel

$$t(\overline{\omega} \circ \omega) = (t\overline{\omega}) \circ (t\omega) \quad (\omega, \overline{\omega} \in \Omega) \tag{14}$$

gilt für $\omega < \overline{\omega}$ nach Definition von t, für $\overline{\omega} < \omega$ folgt sie dann mit (13), und für $\overline{\omega} = \omega$ folgt sie aus $t(\omega \circ \omega) = t(t\omega) = (t\omega) \circ (t\omega)$. Wegen (12) kann (14) auch geschrieben werden als

$$(\overline{\omega} \circ \omega) \circ (\overline{\omega} \circ \omega) = (\overline{\omega} \circ \overline{\omega}) \circ (\omega \circ \omega) \quad (\omega, \overline{\omega} \in \Omega),$$

also ist $\circ$ in Ω quadrat-symmetrisch. Mit $\omega^2 = \omega \circ \omega$ wird für $n \in I\!N$ dann

$$n^2 = n \circ n = tn = n + 1,$$

also $1^2 = 2, 1^4 = 2^2 = 3, 1^8 = 3^2 = 4, \ldots$, kurz

$$1^{2^n} = n + 1 \quad (n \in I\!N) \tag{15}$$

bezüglich der durch (11), (12) gegebenen quadratisch-symmetrischen Verknüpfung in Ω.

5. Beweis des Lemmas. Ausgehend von einer Folge $(d_n)_{n \in I\!N}$ in V geht es darum, $f : \Omega \to E$ mit den Eigenschaften (8), (9) zu konstruieren. Zuerst definieren wir $f(1), f(2), f(3), \ldots$ durch

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f(2) - 2f(1) &= d_1, \\ f(3) - 2f(2) &= d_2, \ \ldots, \end{aligned}$$

allgemein

$$d(n) := f(n+1) - 2f(n) = d_n \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{16}$$

Wegen (15) ist dann (9) mit $\alpha = 1$ erfüllt. Durch $f(1) = 0$ und (16) werden für $n \in \mathbb{N}$ Elemente $f(n) \in E$, $d(n) \in V$ gegeben. Nun erklären wir für $\overline{\omega} \circ \omega \in \Omega$ (mit $\omega < \overline{\omega}$) rekursiv

$$d(\overline{\omega} \circ \omega) := \frac{d(t\overline{\omega}) + d(t\omega)}{2} \in V \quad (\omega < \overline{\omega})$$

(V ist konvex) und

$$f(\overline{\omega} \circ \omega) := f(\overline{\omega}) + f(\omega) + \frac{d(\overline{\omega}) + d(\omega)}{2} \quad (\omega < \overline{\omega}), \tag{17}$$

also haben wir Funktionen $d : \Omega \to V$, $f : \Omega \to E$ definiert. Wegen (17) gilt (8) für $y < x$, wegen (13) dann auch für $x < y$. Zum endgültigen Nachweis von (8) braucht nur noch der Fall $x = y = \omega$ erledigt zu werden, und dazu genügt es,

$$f(\omega^2) - 2f(\omega) = d(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{18}$$

zu beweisen. Wegen (16) gilt (18) für $\omega \in \mathbb{N}$, d.h. für $l(\omega) = 1$. Der Fall $l(\omega) > 1$ wird rekursiv behandelt: Wir haben $\omega = \omega_1 \circ \omega_2$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$, d.h. $l(\omega_1), l(\omega_2) < l(\omega)$, also kann (18) mit ω_1, ω_2 an Stelle von ω vorausgesetzt werden. Dann erhält man

$$\begin{aligned} f(\omega^2) - 2f(\omega) &= f(\omega_1^2 \circ \omega_2^2) - 2f(\omega_1 \circ \omega_2) = \\ = f(\omega_1^2) + f(\omega_2^2) + \frac{d(\omega_1^2) + d(\omega_2^2)}{2} &- 2\left[f(\omega_1) + f(\omega_2) + \frac{d(\omega_1) + d(\omega_2)}{2}\right] = \\ &= d(\omega_1) + d(\omega_2) - 2\frac{d(\omega_1) + d(\omega_2)}{2} + \frac{d(\omega_1^2) + d(\omega_2^2)}{2} = \\ &= \frac{d(\omega_1^2) + d(\omega_2^2)}{2} = \frac{d(t\omega_1) + d(t\omega_2)}{2} = d(\omega_1 \circ \omega_2) = d(\omega). \end{aligned}$$

Bemerkung: Gemäß vorstehendem Beweise braucht die Menge V im Lemma nicht beschränkt zu sein, und statt Konvexität von V genügt Mittelpunktskonvexität, d.h., aus $a, b \in V$ folgt $\frac{1}{2}(a+b) \in V$.

Literatur

[1] D.H. Hyers: *On the stability of the linear functional equation.* Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **27**, 222-224 (1941).

[2] E.A. Lifšic: *Ideal'no vypuklye množestva.* Funkcional'. Analiz Priložen. **4**, No. 4, 76-77 (1970).

[3] Zsolt Páles, Peter Volkmann und R. Duncan Luce: *Hyers-Ulam stability of functional equations with a square-symmetric operation.* Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **95**, 12772-12775 (1998).

[4] Jacek Tabor: *Zbiory idealnie wypukłe a twierdzenie Hyersa.* Vortrag am 15. März 1999 an der Universität Katowice; dazu gibt es eine schriftliche Fassung in englischer Sprache, die vielleicht schon veröffentlicht ist.

[5] Peter Volkmann: *On the stability of the Cauchy equation.* Proceedings of the Numbers, Functions, Equations '98 International Conference, herausgegeben von Zsolt Páles, Janus Pannonius Tudományegyetem Pécs, 150-151 (1998).

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland.