

Croissance d'une suite définie par certaine solution distribution d'une équation fonctionnelle

Alice Simon et Peter Volkmann

Résumé. Soit la suite $(c_n)_{n \geq 0}$, où

$$c_1 = c_0 = 1 \tag{1}$$

et $(n \geq 1)$

$$c_{n+1} + c_{n-1} + 2c_n = \begin{cases} 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{4}) \\ 4c_{n/4} & (n \equiv 0 \pmod{4}). \end{cases} \tag{2}$$

On montre que $|c_n| \leq \sqrt{2}n^{3/2} - 1$ ($n \geq 2$). Donc:

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n, \quad c_{-n} = c_n \tag{3}$$

définit une distribution tempérée, solution de l'équation fonctionnelle

$$T(x/4) = T(x+1) + T(x-1) + 2T(x). \tag{4}$$

1. Le résultat et ses conséquences.

Théorème. La suite $(c_n)_{n \geq 0}$ donnée par (1), (2) satisfait

$$|c_n| \leq \sqrt{2}n^{3/2} - 1 \quad (n \geq 2). \tag{5}$$

On a égalité, si $n = 2^{2k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Soit l'équation fonctionnelle

$$4qT(qx) = T(x+1) + T(x-1) + 2T(x), \tag{6}$$

où $0 < q < 1$. Dans [1] on a déterminé les solutions de (6) dans \mathcal{E}' : ce sont les solutions intéressantes pour le «problème de Schilling» (voir [2]). Ici on considère (6) dans le cas particulier $q = 1/4$ (donc (4)), et on s'intéresse aux solutions T dans $\mathcal{S}' \setminus \mathcal{E}'$. On les cherche sous la forme (3), où δ_n désigne la mesure de Dirac au point $x = n$. En supposant seulement

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n \tag{7}$$

(sans la condition supplémentaire $c_{-n} = c_n$) on déduit de (4) aisément les relations de récurrence (2) ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Les nombres c_0, c_1 étant arbitraires, les autres termes c_n sont déterminés de manière unique, et (7) donne une solution $T \in \mathcal{D}'$ de l'équation (4). On se restreint au cas pair, c.-à-d. $c_{-n} = c_n$. Dans ce cas, (2) pour $n = 0$ entraîne $c_1 = c_0$, on peut donc supposer (1). Alors il résulte du théorème, que (3) définit une distribution tempérée.

2. Démonstration du théorème. 1. En partant de (1), (2) on calcule

$$c_2 = -3, \quad c_3 = 5, \quad c_4 = -7, \quad c_5 = 13. \quad (8)$$

Ensuite on démontre

$$\begin{aligned} c_{8n-4} &= -7 \\ c_{8n-3} &= 7 - 2c_{2n} \\ c_{8n-2} &= 4c_{2n} - 7 \\ c_{8n-1} &= 7 - 6c_{2n} \\ c_{8n} &= 8c_{2n} - 7 \\ c_{8n+1} &= 7 - 6c_{2n} \\ c_{8n+2} &= 4c_{2n} - 7 \\ c_{8n+3} &= 7 - 2c_{2n} \end{aligned} \quad (9)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$): pour $n = 1$ les deux premières formules sont vraies d'après (8) et donnent c_4, c_5 ; pour $m = 6, 7, 8, \dots$ l'expression de c_m résulte de celles de c_{m-1} et c_{m-2} grâce à (2).

De $c_2 = -3$ et $c_{8n} = 8c_{2n} - 7$ ($n \geq 1$) il résulte que

$$c_{2^{2k-1}} = 1 - 2^{3k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

donc pour $n = 2^{2k-1}$ on a égalité dans (5).

2. Les formules (1), (8), (9) entraînent ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$c_n > 0 \quad (n \text{ impair}), \quad c_n < 0 \quad (n \text{ pair}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |c_{8n-4}| &= |c_{8n+4}| = 7 < |c_{8n-3}| = |c_{8n+3}| < \\ &< |c_{8n-2}| = |c_{8n+2}| < |c_{8n-1}| = |c_{8n+1}| < |c_{8n}|. \end{aligned} \quad (11)$$

En plus on a

$$f_n(x) := \sqrt{2}(8n - x)^{3/2} - (32 - 8x)n^{3/2} - 2x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 4). \quad (12)$$

En effet, $f_n''(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq 4$), $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) \geq 0$.

3. Pour montrer l'inégalité (5), observons d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2, 3$. Il suffit donc de partir de cette inégalité avec $2n$ au lieu de n , et de la vérifier avec n remplacé par

$$8n - 4, 8n - 3, 8n - 2, 8n - 1, 8n, 8n + 1, 8n + 2, 8n + 3 \quad (13)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$). Grâce à (11) il suffit de traiter les cinq premiers termes de (13). On suppose donc

$$|c_{2n}| \leq 4n^{3/2} - 1, \quad (14)$$

et on montre

$$|c_{8n-q}| \leq \sqrt{2}(8n - q)^{3/2} - 1 \quad (q = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (15)$$

4. D'après (12) on a pour $q = 0, 1, 2, 3, 4$ l'inégalité

$$\sqrt{2}(8n - q)^{3/2} - (32 - 8q)n^{3/2} - 2q \geq 0.$$

En regroupant on obtient

$$7 + (8 - 2q)(4n^{3/2} - 1) \leq \sqrt{2}(8n - q)^{3/2} - 1.$$

Avec (14) il en résulte

$$7 + (8 - 2q) |c_{2n}| \leq \sqrt{2}(8n - q)^{3/2} - 1.$$

Le premier membre de cette inégalité est $|c_{8n-q}|$ (voir (9), (10)); la formule (15) est donc établie.

Bibliographie

1. K. Baron, A. Simon et P. Volkman: *Solutions d'une équation fonctionnelle dans l'espace des distributions tempérées*. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **319**, 1249-1252 (1994).
2. 35th International Symposium on Functional Equations, Graz 1997, Special Session: *Schilling's problem*. Aequationes Math. **55**, 314-315 (1998).

Adresse des auteurs:

A. Simon, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45067 Orléans Cedex 2, France. (simon@labomath.univ-orleans.fr)

P. Volkman, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Allemagne.