http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 5, 3 pp., *09.11.1999*

Volumen eines Kugeleinschnittes

Roland Uhl

Abstract. The volume of the intersection of a solid sphere and two half-spaces is calculated by geometric considerations.

Einführung. Wir bestimmen das Volumen V eines räumlichen Bereiches, welcher von einer Kugelfläche und zwei Ebenen begrenzt wird. Dieser sei durch

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x \geq a, \quad y \geq b \tag{1}$$

bezüglich eines kartesischen xyz-Koordinatensystems gegeben; dabei bezeichnen R, a, b reelle Konstanten mit $R > 0$ und $a^2 + b^2 < R^2$.

Eine Formel für V findet sich bei Haible und Volkmann [1] und wurde durch Integration gefunden. Die vorliegende Methode ist dagegen geometrisch und auch dann anwendbar, wenn die beiden Ebenen nicht zueinander senkrecht stehen.

Berechnung dreier Winkel. Der Bereich (1) besitzt die zwei Spitzen $P_\pm$: $(a, b, \pm c)$ mit

$$c = \sqrt{R^2 - a^2 - b^2} \tag{2}$$

sowie zwei Kleinkreisbögen von P_+ nach P_- als Grate. Der eine Bogen mit Mittelpunkt $M : (0, b, 0)$ hat den Radius

$$r = \sqrt{R^2 - b^2}$$

und den Mittelpunktswinkel $2\omega_1$ mit $\cos\omega_1 = a/r$, d.h. mit

$$\omega_1 = \arccos \frac{a}{\sqrt{R^2 - b^2}}. \tag{3}$$

Analog hat der andere Bogen den Mittelpunktswinkel $2\omega_2$ mit

$$\omega_2 = \arccos \frac{b}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \tag{4}$$

Beide Bögen schließen in P_+ einen Winkel φ ein. Dieser ist gleich dem Winkel zwischen ihren Tangentenvektoren $t_1 : (c, 0, -a)$ und $t_2 : (0, c, -b)$ und ergibt sich daher, etwa über

$$\cot\varphi = \frac{t_1 \cdot t_2}{|t_1 \times t_2|},$$

zu

$$\varphi = \operatorname{arccot}\frac{ab}{Rc}. \tag{5}$$

Zerlegung von V. Vorübergehend nehmen wir noch $a, b > 0$ an. Dann wird durch die Ursprungsebene, welche P_+ und P_- enthält, der Bereich (1) in zwei Teilbereiche zerlegt: $V = V_1 + V_2$, wobei V_1 bzw. V_2 das Volumen desjenigen Teiles bezeichne, der von dieser Ursprungsebene, der Kugelfläche und der Ebene $y = b$ bzw. $x = a$ begrenzt wird. Der Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ sei entsprechend zerlegt.

Bestimmung von V_1. Alle Punkte der Kugel mit $y \geq b$ bilden zusammen einen Kugelabschnitt, dessen Volumen durch $V_\mathrm{A} = \frac{\pi}{3}d^2(3R - d)$ mit $d = R - b$ gegeben ist, also

$$V_\mathrm{A} = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2 b + b^3).$$

Das Tetraeder mit P_+, P_-, M und dem Ursprung als Ecken hat das Volumen

$$V_\mathrm{T} = \frac{1}{3}abc.$$

Das sphärische Dreieck mit den Ecken P_+, P_- und $N : (0, R, 0)$ besitzt in $P_\pm$ jeweils den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$, in N den Winkel $2\omega_1$ und somit den Flächeninhalt $F = R^2(2\omega_1 - 2\varphi_1)$. Werden alle seine Punkte durch Strecken mit dem Ursprung verbunden, so ergibt sich ein kugelsektorartiger Bereich mit dem Volumen $V_\mathrm{S} = \frac{1}{3}RF$, also

$$V_\mathrm{S} = \frac{2}{3}R^3(\omega_1 - \varphi_1).$$

Außerdem gilt noch

$$V_\mathrm{S} - V_\mathrm{T} + V_1 = \frac{\omega_1}{\pi}V_\mathrm{A}.$$

Insgesamt folgt nun

$$V_1 = \frac{1}{3}abc + \frac{2}{3}R^3\varphi_1 - \Big(R^2 b - \frac{1}{3}b^3\Big)\omega_1. \tag{6}$$

Ergebnis. Durch Addition von (6) und der dazu analogen Formel

$$V_2 = \frac{1}{3}abc + \frac{2}{3}R^3\varphi_2 - \Big(R^2a - \frac{1}{3}a^3\Big)\omega_2$$

erhalten wir schließlich

$$V = \frac{2}{3}abc + \frac{2}{3}R^3\varphi - \Big(R^2b - \frac{1}{3}b^3\Big)\omega_1 - \Big(R^2a - \frac{1}{3}a^3\Big)\omega_2. \tag{7}$$

Diese Gleichung gilt aber auch ohne die Annahme $a, b > 0$; bei der Herleitung sind dann φ_1, φ_2 und einige Volumina mit geeignetem Vorzeichen zu betrachten.

Berechnung von φ_1, φ_2. Diese Winkel werden noch benötigt, wenn V_1 und V_2 einzeln berechnet werden sollen. Dazu können die beiden Gleichungen

$$\cot\varphi_1 = \frac{Ra}{bc} \quad (b \neq 0), \qquad \cot\varphi_2 = \frac{Rb}{ac} \quad (a \neq 0)$$

verwendet werden, die sich ähnlich wie (5) herleiten lassen und die über das Additionstheorem für cot auch zu (5) führen.

Vergleich mit [1]. Dort wird V für $b \geq 0$ mit den drei Größen r, $\alpha = R/r$ und $\vartheta = -a/r$ dargestellt. Diese Formel ergibt sich nun aus (7) zusammen mit (2) bis (5) durch Einsetzen von

$$R = r\alpha, \quad a = -r\vartheta, \quad b = r\sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Literatur

[1] B. Haible, P. Volkmann: *Calcul du volume d'un morceau de boule,* Sem. LV, No. 4, 2 pp. (1999). (http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv)

Adresse des Autors: Mathematisches Institut II, Universität Karlsruhe, D-76128 Karlsruhe, Deutschland. (roland.uhl@math.uni-karlsruhe.de)