

Lösung zu 3.5: a) Wir berechnen $a^{\ln x / \ln a} = e^{\ln a \frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln x} = x$ und $\frac{\ln(a^x)}{\ln a} = \frac{\ln(e^{x \ln a})}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x$. Also ist die Umkehrfunktion durch $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ gegeben.

b) Angenommen, $\log_2(3)$ ist rational. Dann gibt es ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\log_2(3) = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{m}{n}$ bzw. $n \ln 3 = m \ln 2$ (mit $n \neq 0$). Wenden wir die Exponentialfunktion auf diese Gleichung an, so folgt $3^n = 2^m$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn

1. im Fall $n, m > 0$ ist die linke Seite eine ungerade und die rechte Seite eine gerade Zahl,
2. im Fall $n > 0$ und $m \leq 0$ ist $3^n > 1 \geq 2^m$
3. im Fall $n < 0$ und $m \geq 0$ ist $3^n < 1 \leq 2^m$
4. im Fall $m, n < 0$ bilden wir die Kehrwerte und erhalten wieder den Widerspruch aus dem ersten Fall.