Lösung zu 4.3: Die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}.$$

Also sind die Nullstellen der Ableitung für $x > 0$ gegeben durch die Bedingung $\cos\sqrt{x} = 0$ bzw. $\sqrt{x} = \frac{2n+1}{2}\pi$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten die kritischen Stellen $x = \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2$.

Berechnen wir noch die zweite Ableitung:

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4x} \sin \sqrt{x}\ .$$

Dann ergibt sich an den kritischen Stellen

$$f''\left(\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2\right) = -\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)}{2}\pi\right) = \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Also gibt es sowohl lokale Maxima als auch Minima der Funktion.