Lösung zu 5.3: Mit der Ableitung $u'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, sehen wir, dass die Ableitung im wesentlichen schon im Integranden des ersten Integrals vorliegt, d.h. es gilt $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2u'(x)dx = 2du$. Transformieren wir nun noch den verbleibenden Ausdruck, $(1-x) = (1-u^2)$, und berücksichtigen die neuen Grenzen mit $u=0$ für $x=0$ und $u=1$ für $x=1$ so ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{(1-x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 (1-u^2)\,du$$

Das Integral auf der rechten Seite kann direkt mit den Stammfunktionen berechnet werden zu

$$\int_0^1 \frac{(1-x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,(u - \frac{1}{3}u^3)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Im zweiten Beispiel fassen wir x in Abhängigkeit von t, d.h. als Funktion $x(t)$, auf und berechnen $x'(t) = \cos t$. Also gilt $dx = \cos t\,dt$.

Außerdem benötigen wir noch die Grenzen für die Variable t. Mit dem Hinweis sehen wir, dass $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ gilt. Nutzen wir die Symmetrie des Sinus so ergibt sich weiterhin $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

Nun können wir die Substitution durchführen und bekommen

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt\,.$$

Verwenden wir nun das Additionstheorem $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ und $\cos : (-\pi/6, \pi/6) \to (-1/2, 1/2)$, so folgt das Resultat

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{\cos t}\cos t\,dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1\,dt = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}\,.$$