Lösung zu 5.5: Wir führen eine partielle Integration aus und bekommen mit $f'(x) = \sin ax$ und $g(x) = \cos bx$ das Resultat

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)\cos(bx) - \frac{b}{a}\int \cos(ax)\sin(bx)\,dx\,.$$

Im Fall $a = b$ hilft uns diese Identität weiter, denn dann ergibt sich

$$2\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos^2(ax)\,.$$

Im Fall $a \neq b$ führen wir noch eine weitere partielle Integration aus, nun mit $\tilde{f}'(x) = \cos(ax)$ und $\tilde{g}(x) = \sin bx$. Es folgt

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)\cos(bx) - \frac{b}{a^2}\sin(ax)\sin(bx) + \frac{b^2}{a^2}\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx\,.$$

Also gilt für das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned}\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\cos(bx) - \frac{b}{a^2}\sin(ax)\sin(bx)\right)\\ &= -\left(\frac{a}{a^2-b^2}\cos(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a^2-b^2}\sin(ax)\sin(bx)\right)\,.\end{aligned}$$