# 1 Allgemeine Grundlagen

Aussagen sind Behauptungen, für die sich entscheiden läßt, ob sie *wahr* oder *falsch* sind.

(1.1) Verknüpfte Aussagen, die immer wahr sind, heißen *Tautologien*.

(1.2) Die Kontraposition $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ ist eine Tautologie.

Direkter Beweis: $A \Longrightarrow B$
Aus der Voraussetzung $A$ folgt die Behauptung $B$.

Indirekter Beweis: $\neg B \Longrightarrow \neg A$
Angenommen, die Voraussetzung $A$ gelte, aber die Behauptung $B$ sei falsch. Dann zeige, dass auch die Voraussetzung $A$ falsch sein muss, Widerspruch!

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen. Sie haben keinen Wahrheitswert; erst durch Einsetzen der Variablen lässt sich der Wahrheitswert bestimmen.

Wir verwenden Quantoren:
$\forall x \in M : A(x)$ für alle $x$ in der Menge $M$ ist die Aussage $A(x)$ wahr
$\exists x \in M : A(x)$ es existiert ein $x$ in der Menge $M$, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist
$\exists! x \in M : A(x)$ es existiert genau ein $x$ in der Menge $M$, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist

# 1 Allgemeine Grundlagen

Mengenbegriff nach Cantor: Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter und unterscheidbarer Dinge zu einem Ganzen.

Wir schreiben $x \in M$, wenn $x$ Element der Menge $M$ ist, und $M \subset N$, falls $x \in M \Rightarrow x \in N$.

Vereinigung $M \cup N = \{x\colon x \in M \vee x \in N\}$
Durchschnitt $M \cap N = \{x\colon x \in M \wedge x \in N\}$
Differenz $M \setminus N = \{x \in M\colon x \notin N\}$
Cartesisches Produkt $M \times N = \{(x,y)\colon x \in M \wedge y \in N\}$
Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M) = \{A\colon A \subset M\}$ umfasst die Menge aller Teilmengen von $M$.

Seien $M, N$ Mengen. Eine Funktion (Abbildung) $f$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau einen Wert $y = f(x) \in N$ zugeordnet. Wir schreiben $f\colon M \longrightarrow N$, $x \longmapsto f(x)$.

(1.5) a) $f\colon M \to N$ heißt *surjektiv*, wenn $N = f(M)$ gilt.
b) $f\colon M \to N$ heißt *injektiv*, wenn gilt: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
c) $f\colon M \to N$ heißt *bijektiv*, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Sei $y \in N$.
a) Wenn $f\colon M \to N$ surjektiv ist, ist die Gleichung $f(x) = y$ immer lösbar.
b) Wenn $f\colon M \to N$ injektiv ist und Gleichung $f(x) = y$ lösbar ist, ist die Lösung eindeutig.
c) Wenn $f\colon M \to N$ bijektiv, ist $f(x) = y$ immer lösbar und die Lösung ist eindeutig.

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Natürliche Zahlen

(2.1) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ lässt sich eindeutig durch die Peano-Axiome charakterisieren:
(P1) $1 \in \mathbb{N}$
(P2) $n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N}$
(P3) $n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m \implies n+1 \neq m+1$
(P4) $n \in \mathbb{N} \implies n+1 \neq n$
(P5) Wenn für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ gilt

(i) $1 \in M$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1, \dots, n \in M \implies n+1 \in M$

dann gilt $M = \mathbb{N}$.

(2.2) Es ist genau dann $n < m$, wenn $m$ durch (mehrfaches) Ausführen der Nachfolgeoperation $+1$ erreicht wird.

(2.3) (P5) ist äquivalent zu:
(P5') Wenn für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ gilt

(i) $1 \in M$ (ii') $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \in M \implies n+1 \in M$

dann gilt $M = \mathbb{N}$.
(P5") Jede Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, besitzt ein genau ein kleinstes Element.

(2.4) Eine endliche Menge mit $N$ Elementen besitzt $2^N$ Teilmengen.
(2.5) Es gibt $N!$ Permutationen eines $N$-Tupels.

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Natürliche Zahlen

(2.6) Eine endliche Menge mit $N$ Elementen besitzt $\binom{N}{k} = \dfrac{N!}{(N-k)!\,k!}$ Teilmengen mit $k$ Elementen (dabei setze $0! := 1$). Insbesondere gilt $\sum\limits_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$.

(2.7) a) Für die *Binomialkoeffizienten* gilt:

$$\binom{N}{0} = \binom{N}{N} = 1 \qquad \text{und} \qquad \binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \quad \text{für } 1 \le k \le N.$$

b) Binomischer Lehrsatz $(a+b)^N = \sum\limits_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$.

## Kombinatorik - Theorie der Anzahlbestimmung

(2.8) Aus einer Menge $A$ mit $N$ Elementen kann man folgende Stichproben vom Umfang $k$ ziehen:

a) $N^k$ geordnete Stichproben mit Wiederholungen $(k \in \mathbb{N})$

b) $\dfrac{N!}{(N-k)!}$ geordnete Stichproben ohne Wiederholungen $(k \in \{1,\dots,N\})$

c) $\binom{N}{k}$ ungeordnete Stichproben ohne Wiederholungen $(k \in \{1,\dots,N\})$

d) $\binom{N+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholungen $(k \in \mathbb{N})$.

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Algebraische Grundlagen

Eine Menge $G$ mit einer Verknüpfung

$$\begin{array}{rrcl} *: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

heißt *Halbgruppe*, wenn gilt:

I) Assoziativgesetz $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a,b,c \in G$.
II) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$, d. h. $e * a = a * e = a$ für alle $a \in G$

Eine Halbgruppe $G$ heißt *Gruppe*, wenn gilt:

III) Jedes Element $a \in G$ besitzt ein Inverses $a^{-1} \in G$, d. h. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
IV) Eine Gruppe heißt *kommutativ*, wenn $a * b = b * a$ für alle $a,b \in G$.

Eine kommutative Gruppe $R$ mit Verknüpfung $+$ und neutralem Element 0 heißt *Ring*, wenn auf $R$ eine weitere Verknüpfung $\cdot$ definiert ist, wenn $R\setminus\{0\}$ mit $\cdot$ eine Halbgruppe ist, und wenn gilt:

V) Distributionsgesetz $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ für alle $a,b,c \in R$.

Ein *Körper* $K$ ist ein Ring, für den $K\setminus\{0\}$ mit $\cdot$ eine kommutative Gruppe ist.
Ein angeordneter Körper $K$ ist ein Körper mit einer Ordnungsrelation „ $\leq$ “ mit

a) $x \leq y \ \vee\ y \leq x$
b) $x \leq x$
c) $x \leq y \ \wedge\ y \leq x \implies x = y$
d) $x \leq y \ \wedge\ y \leq z \implies x \leq z$
e) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
f) $x \leq y \ \wedge\ z \geq 0 \implies x\cdot z \leq y \cdot z$ für alle $x,y,z \in K$

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Reelle Zahlen

(2.9) Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält, und der das *Vollständigkeitsaxiom* erfüllt:

(2.10) $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine *untere Schranke* $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $a \le x$ für $x \in M$, und $M$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine *obere Schranke* $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \le a$ für $x \in M$.

Das *Infimum* $\inf M$ ist die größte untere Schranke von $M$, d.h.

$$\inf M = s \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M\colon\ x < s + \varepsilon$$

Das *Supremum* $\sup M$ ist die kleinste obere Schranke von $M$, d.h.

$$\sup M = s \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M\colon\ x > s - \varepsilon.$$

Falls $\inf M \in M$, dann heißt $\inf M = \min M$ das *Minimum*.

Falls $\sup M \in M$, dann heißt $\sup M = \max M$ das *Maximum*.

(2.11) a) Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.
b) Jede nicht leere nach unten beschränkte Menge besitzt ein Infimum.

(2.12) a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N}\colon \qquad x < n$
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N}\colon \qquad \frac{1}{m} < \varepsilon$
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ q \in \mathbb{Q}\colon \qquad |x - q| < \varepsilon$

(2.13) Für $a \ge 0$ und $N \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $x^N = a$ genau eine positive Lösung in $\mathbb{R}$.

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Komplexe Zahlen

(2.14) Sei $\mathrm{i}$ die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i}^2 = -1$, und sei $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge der komplexen Zahlen.

(2.15) $\mathbb{C}$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ und $\mathrm{i}$ enthält.

(2.16) a) Für $z = x + \mathrm{i}y$ heißt $x = Re(z)$ der Realteil und $y = Im(z)$ der Imaginärteil von $z$.
b) $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu $z$.
c) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Betrag von $z$.

(2.17) Es gibt genau $N$ verschiedene komplexe Zahlen $z_k = \exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, ..., N-1$, mit $z^N = 1$.

(2.18) Für $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$ gilt:

1) allgemeine Dreiecksungleichung $\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{N} |a_k|$

2) Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\sum_{k=1}^{N} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|^2\right)^{1/2}$

3) Minkowski-Ungleichung $\left(\sum_{k=1}^{N} |a_k + b_k|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|^2\right)^{1/2}$

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Komplexe Zahlen

(2.19) Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $P$ mit grad $P \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$. d.h. $P(\xi) = 0$.

(2.20) Jedes Polynom $P$ mit grad $P = N \geq 1$ besitzt eine Zerlegung

$$P(z) = a_N(z - z_1) \dots (z - z_N) \ .$$

Dabei sind $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von $P$.

(2.21) $\xi \in \mathbb{C}$ heißt $k$-fache Nullstelle von $P(z)$, falls $P(z) = (z - \xi)^k Q(z)$ und $Q(\xi) \neq 0$, grad $q = N - k$.

(2.22) Wenn für $P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$, $Q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$ und $P(\xi_j) = Q(\xi_j)$ für $n+1$ verschiedene $\xi_j$ gilt, dann gilt $P = Q$ (also $a_k = b_k$ für alle $k = 0, \dots, N$).

(2.23) Polynomdivision mit Rest: Zu Polynomen $P$ und $Q$ mit grad $P \geq$ grad $Q \geq 1$ existieren Polynome $S$ und $R$ mit grad $R <$ grad $Q$ und

$$P(z) = S(z)Q(z) + R(z) \ .$$

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Endliche Körper

Karlsruhe Institute of Technology

(2.24) Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $n \in \mathbb{N}$, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = k \cdot m$.
Wenn $n > 1$ und wenn $n$ nur die Teiler 1 und $n$ besitzt, heißt $n$ *Primzahl*.

(2.25) Jede Zahl $n \in \mathbb{N}, n > 1$ besitzt eine Darstellung $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ mit Primzahlen $p_i \neq p_j$ und $m_i \in \mathbb{N}$.
Dabei sind die Exponenten $m_i$ eindeutig bestimmt.

(2.26) Zu $n, m \in \mathbb{N}$ definiere

$$\mathrm{ggT}(n,m) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}$$
$$\mathrm{kgV}(n,m) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\}.$$

Es gilt $kgV(n,m) = \dfrac{n \cdot m}{\mathrm{ggT}(n,m)}$ .

(2.27) *Euklidischer Algorithmus* zu $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll}
r_0 = n,\ r_1 = m & \\
r_0 = s_1 r_1 + r_2 & r_2 \in \{1, \dots, r_1 - 1\} \\
r_1 = s_2 r_2 + r_3 & r_3 \in \{1, \dots, r_2 - 1\} \\
\quad\vdots & \\
r_{k-1} = s_k r_k + r_{k+1} & \text{mit } \ r_{k+1} = 0 \,.
\end{array}$$

Es gilt: $r_k = \mathrm{ggT}(n,m)$ und es existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n,m) = an + bm$.

# 2 Aufbau des Zahlensystems – Endliche Körper

(2.28) $x \equiv y \mod m \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon x - y = km$ *(„x kongruent y modulo m“)*

(2.29) $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$ für $m \geq 2$ ist ein kommutativer Ring *(Restklassenring)* mit

$$a +_m b = c \iff a + b \equiv c \mod m$$
$$a \cdot_m b = c \iff a \cdot b \equiv c \mod m$$

(2.30) $x \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses $y \in \mathbb{Z}_m$, wenn $x$ und $m$ teilerfremd sind (d.h. $\mathrm{ggT}(x, m) = 1$).

(2.31) Der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn $m = p$ eine Primzahl ist.

(2.32) Sei $\mathbb{Z}_m^* = \{x \in \mathbb{Z}_m \mid \mathrm{ggT}(x, m) = 1\} = \{x_1, \ldots, x_{\varphi(m)}\}$ die Menge der zu $m$ teilerfremden Zahlen. Dann gilt: $\mathbb{Z}_m^*$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$.

(2.33) Seien $a, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$.

(2.34) Die Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ wird mit $S_n = S(\{1, \ldots, n\}) = \{f\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ bijektiv}\}$ bezeichnet.

(2.35) $S_n$ wird von den Transpositionen $[a, b]$ erzeugt, d.h. $\sigma \in S_n$ lässt sich als Verknüpfung $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ von Transpositionen darstellen.

# 3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.1) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine kommutative Gruppe $V$ bzgl. der Operation $+$ ist ein *Vektorraum* über $\mathbb{K}$, wenn eine Operation

$$\begin{array}{rrcl} \cdot\,: & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda, \mathbf{v}) & \rightarrowtail & \lambda \mathbf{v} \end{array}$$

existiert mit

i) $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \;\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) & = & \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w} \\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} & = & \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v} \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v} & = & \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}) \end{array}$$

ii) für die Eins $1 \in \mathbb{K}$ gilt $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(3.2) Eine Teilmenge $W \subset V$ von einem Vektorraum $V$ heißt (linearer) *Unterraum* von $V$, falls $W$ bzgl. $+$ und $\cdot$ selbst ein Vektorraum ist.

(3.3) Sei $V$ ein Vektorraum. $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn

a) $\mathbf{0} \in W$

b) $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$: $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$

c) $\forall\, \mathbf{w} \in W \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$

# 3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.4) Sei $V$ ein Vektorraum und sei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. Dann heißt $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{K}$ eine *Linearkombination* von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Alle Linearkombinationen von $\mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_m$ bilden den Spann $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j | \lambda_j \in \mathbb{K}\}$. $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ ist ein linearer Teilraum.

(3.5) Eine Menge $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ heißt *linear unabhängig*, falls gilt:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \lambda_j \in \mathbb{K} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

$B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ heißt *Basis* von $V$, wenn $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N$ linear unabhängig und $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\} = V$.

(3.6) Ist $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ eine Basis von $V$, so lässt sich jeder Vektor $\mathbf{u} \in V$ als Linearkombination $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit eindeutigen Skalaren $\lambda_j \in \mathbb{K}$ darstellen (Basisdarstellung).

(3.7) Sei $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ eine Basis von $V$, und sei $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit $\lambda_k \neq 0 \quad (k \in \{1, \dots, N\})$. Dann ist auch $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_N\}$ eine Basis von $V$.

# 3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.8) Sei $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ eine Basis von einem Vektorraum $V$, und sei $m > N$.
Dann ist $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} \subset V$ linear abhängig.

(3.9) Wenn ein Vektorraum $V$ eine endliche Basis hat, dann ist jede Basis von $V$ endlich, je zwei Basen haben die gleiche Anzahl von Elementen $\dim V$.

(3.10) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(3.11) Seien $V, W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$.

a) Eine Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ heißt *linear*, wenn

$$\begin{array}{lrcl} \forall\, \mathbf{w} \in V: & T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & = & T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \\ \forall\, \mathbf{v}\, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}: & T(\lambda \mathbf{v}) & = & \lambda T(\mathbf{v}) \end{array}$$

b) Eine Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, wenn sie linear und bijektiv ist.

c) $V$ und $W$ heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus $T\colon V \longrightarrow W$ existiert.

(3.12) Zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$ Vektorräume sind genau dann isomorph,
wenn sie die gleiche Dimension haben.

# 3 Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

Gesucht sind $N$ Unbekannte $x_1,\dots,x_N$, die $M$ lineare Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ & \cdots & + & a_{1N}x_N = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ & \cdots & + & a_{2N}x_N = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{M1}x_1+a_{M2}x_2+ & \cdots & + & a_{MN}x_N = & b_M. \end{array}$$

Dabei seien $a_{nm}$ für $1\le m\le M$ und $1\le n\le N$ und $b_m$ für $1\le m\le M$ gegeben.

(3.14)

a) $\mathbb{K}^{M\times N} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{mn}\in\mathbb{K} \\ m=1,\dots,M \\ n=1,\dots,N \end{array} \right\}$ Vektorraum der $M\times N$ Matrizen

b) Zu $A\in\mathbb{K}^{M\times N}$ und $x\in\mathbb{K}^N$ definiere $b=Ax$ mit $b_m=\sum_{n=1}^N a_{mn}x_n$, d.h.

$$A\cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N a_{Mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^M.$$

Die Abbildung $T_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m,\ x\mapsto Ax$ ist linear: $T_A(\lambda x+\mu y)=\lambda T_A(x)+\mu T_A(y)$.

# 3 Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

Karlsruhe Institute of Technology

(3.15) Zu $A \in \mathbb{K}^{P\times M}, B \in \mathbb{K}^{M\times N}$ definiere $C = A\cdot B \in \mathbb{K}^{P\times N}$ durch $(c_{pn}) = \Big(\sum_{m=1}^{M} a_{pm}b_{mn}\Big)_{\substack{p=1,\dots,P\\ n=1,\dots,N}}$

(3.16) Zu $T_A\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^P$, $y \mapsto Ay$ und $T_B\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $x \mapsto Bx$ gilt $T_A \circ T_B = T_{AB}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, $x \mapsto ABx$.

(3.17) $\mathbb{K}^{N\times N}$ ist ein nicht-kommutativer Ring mit neutrales Element bezüglich der Multiplikation

$$I_n = \operatorname{diag}(1,\dots,1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(3.18) Zu $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ definiere $A^T \in \mathbb{K}^{N\times M}$ durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{M1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1N} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

$A^T$ heißt die *transponierte Matrix*.

(3.19) $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$, und orthogonal, wenn $AA^T = I_N = A^TA$.

(3.20) Zu $A = \big(a_{mn}\big)_{\substack{m=1,\dots,M\\ n=1,\dots,N}} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ definiere

| | | |
|---|---|---|
| | $\overline{A} = (\overline{a}_{jk})$ | konjugierte Matrix |
| | $A^H = \overline{A}^T$ | adjungierte Matrix |

$A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt hermitisch, wenn $A^H = A$, und unitär, wenn $AA^H = I_n = A^HA$.

# 3 Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

(3.21) Sei $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$.

a) Die Lösungen $\mathbf{x}_h \in \mathbb{K}^N$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bilden einen linearen Teilraum des $\mathbb{K}^N$. Er heißt *Kern* (*Nullraum*) von $A$. Ist $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ eine Basis von Kern($A$), so ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\mathbf{x}_h = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$ .

b) Ist $\mathbf{x}_s$ eine spezielle Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dann lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_s + \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$ .

(3.22) Sei $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$ eine Matrix mit den Spalten $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)}$, d.h. $A = (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)})$.
Dann definiere das $\mathrm{Bild}(A) := \mathrm{span}\{\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)}\} \subset \mathbb{K}^M$ und $\mathrm{Rang}(A) = \dim \mathrm{Bild}(A)$.

(3.23) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(A)$.

(3.24) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\mathbf{b})$.

(3.25) Sei $N > M$. Dann hat das homogene System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ immer eine nicht-triviale Lösung.

(3.26) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Dann ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) = N$ gilt.

(3.27) Es gilt $\dim \mathrm{Bild}(A) + \dim \mathrm{Kern}(A) = N$.

# 3 Lineare Algebra – Gauß-Elimination

Setze $A^{(1)} = A$ und $b^{(1)} = b$. Für $k = 1,...,r-1$ vertausche Zeilen bzw. Spalten, so dass $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Subtrahiere das $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$-fache der $k$-ten Zeile von der $m$-ten Zeile

$$a_{mj}^{(k+1)} = a_{mj}^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\, a_{kj}^{(k)}, \qquad b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\, b_k^{(k)}, \qquad m = k+1,\dots,M, \quad j = k,\dots,N$$

bis im Schritt $r$ gilt:

$$\left(A^{(r)} \middle| b^{(r)}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1N} & b_1 \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2N}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ & \mathbf{0} & & & & & b_{r+1}^{(r)} \\ & & & & \mathbf{0} & & \vdots \\ & & & & & & b_M^{(r)} \end{array}\right)$$

$A^{(r)}x = b^{(r)}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_M^{(r)} = 0$ gilt.

Zu $x_{r+1},...,x_N$ berechne rückwärts $x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^N a_{kj}^{(k)} x_k\right)/a_{kk}^{(k)}$ für $k = r, r-1, ..., 1$.

Anschließend müssen bei Spaltenvertauschungen die Komponenten $x_n$ umnummeriert werden.

# 3 Lineare Algebra – Gauß-Elimination

(3.28) Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt *regulär* (nicht singulär), wenn $\mathrm{Rang}(A) = N$ gilt. Sonst heißt sie *singulär*.

(3.29) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist äquivalent:

a) Die Zeilenvektoren sind linear unabhängig.

b) Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig.

c) $A$ ist regulär.

d) Rang $A = N$.

e) $Ax = b$ ist für jede rechte Seite lösbar.

f) $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar.

g) Die homogene Gleichung $Ax = 0$ hat nur triviale Lösungen.

(3.30) Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$.
Wenn ein inverses Element $X \in \mathbb{K}^{N\times N}$ bzgl. $\cdot$ existiert mit $XA = AX = I_N$, dann heißt $X = A^{-1}$ *inverse Matrix* zu $A$.

(3.31) Zu $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ existiert genau dann eine inverse Matrix $A^{-1}$, wenn $A$ regulär ist.

Zu einer Permulation $\sigma \in S_N$ ist dier Permutationsmatrix $P = P_\sigma$ mit $P_\sigma x = (x_{\sigma(k)})_k = 1, ..., N$ regulär mit $P^{-1} = P^T$.

# 3 Lineare Algebra – LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche

Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ eine reguläre Matrix.
Starte mit dem Permutationsvektor $\sigma = (1,\dots,N)$.

$$
\begin{array}{l}
\text{für } k = 1,\dots,N-1 \\
\quad \text{wähle } n \geq k \text{ mit } |a_{nk}| \geq |a_{jk}| \text{ für } k \leq j \leq N \\
\quad \text{falls } a_{nk} = 0 \quad \text{Abbruch } (A \text{ singulär}) \\
\quad \text{Vertausche Zeilen } n \text{ und } k: \\
\quad \text{für } j = 1,\dots,N \\
\qquad z = a_{nj}, \quad a_{nj} = a_{kj}, \quad a_{kj} = z \\
\qquad s = \sigma(n), \quad \sigma(n) = \sigma(k), \quad \sigma(k) = s \\
\quad \text{für } n = k+1,\dots,N \\
\qquad a_{nk} := \dfrac{a_{nk}}{a_{kk}} \\
\qquad \text{für } \; j = k+1,\dots,N \\
\qquad\quad a_{nj} := a_{nj} - a_{nk}\, a_{kj}
\end{array}
$$

Setze $\ell_{nj} = a_{nj}$ für $n > j$, $r_{nj} = a_{nj}$ für $n \geq j$ und die Permutationsmatrix $P = P_\sigma$.

(3.32) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche liefert für jede reguläre Matrix $A$ eine Permutationsmatrix $P$, eine normierte untere Dreiecksmatrix $L$ und eine reguläre obere Dreiecksmatrix $R$ mit $PA = LR$. Dann berechnet sich $Ax = b$ aus $Ly = Pb$, $Rx = y$.

# 3 Lineare Algebra – Determinanten

Für eine Permutation $\sigma \in S_N$ heißt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{a<b} \frac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \in \{-1,1\}$ die *Signum*-Funktion.

Es gilt $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\mu)$.

(3.33) Zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ definiere die *Determinante*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{N,\sigma(N)}.$$

(3.34) Die Determinante ist in jeder Zeile linear:

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T + \lambda\tilde{\mathbf{a}}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix}.$$

(3.35) Vertauschen von zwei Zeilen ändert nur das Vorzeichen:

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix}.$$

# 3 Lineare Algebra – Determinanten

(3.36) $\det(A) = \det(A^T)$

(3.37) Für $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist äquivalent:
a) $\det(A) \neq 0$
b) die Zeilen von $A$ sind linear unabhängig
c) die Spalten von $A$ sind linear unabhängig
d) $A$ ist regulär.

(3.38) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3.39) Zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ definiere $A_{kn} \in \mathbb{K}^{N-1\times N-1}$ durch Streichen der Zeile $k$ und Spalte $n$.

Dann gilt: $\det(A) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+n} a_{kn} \det(A_{kn}) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{k+n} a_{kn} \det(A_{kn})$.

Sei $\mathrm{Cof}(A) = \Big((-1)^{k+n}\det(A_{kn})\Big)_{k,n=1,..,N} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Wenn $A$ regulär ist, gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Cof}(A)^T$$

(3.40) Sei $A = (a^{(1)}|\cdots|a^{(N)}) \in \mathbb{K}^{N\times N}$ regulär und $b \in \mathbb{K}^N$.
Dann gilt für die Lösung $x \in \mathbb{K}^N$ von $Ax = b$:

$$x_k = \frac{\det(a^{(1)}|\cdots|b|\cdots|a^{(N)})}{\det(a^{(1)}|\cdots|a^{(k)}|\cdots|a^{(N)})} \qquad \text{(Cramersche Regel)}$$

# 4 Lineare Abbildungen – Basisdarstellungen

(4.1) Seien $V, W$ endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, und sei $T\colon V \to W$ linear.
Sei $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ Basis von $V$ und $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M\}$ Basis von $W$. Sei $T(\mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{M} a_{kj}\mathbf{w}_k$, $a_{kj} \in \mathbb{K}$, eine Basis-Darstellung ($j = 1, \dots, N$). Dann heißt $A = (a_{kj}) \in \mathbb{K}^{M\times N}$ *Matrix-Darstellung* von $T$.

(4.2) Es gilt $\quad \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \iff \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{v}_j,\ \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{M} y_k \mathbf{w}_k$, und $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(4.3) Sei $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_N\}$ Basis von $V$, und seien $s_{jk}$ die Koordinaten von $\tilde{\mathbf{v}}_k$ mit $\tilde{\mathbf{v}}_k = \sum_{j=1}^{N} s_{jk}\mathbf{v}_j$.
Dann gilt: $S$ ist regulär, und $S^{-1}$ beschreibt den Basiswechsel von $\{\tilde{\mathbf{v}}_j\}$ zu $\{\mathbf{v}_j\}$.

(4.4) Sei $R = (r_{ml}) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ mit $\tilde{\mathbf{w}}_l = \sum_{m=1}^{M} r_{il}\mathbf{w}_i$ Matrix zum Basiswechsel von $\{\mathbf{w}_m\}$ zu $\{\tilde{\mathbf{w}}_j\}$.
Dann ist $B := R^{-1}AS$ Matrixdarstellung von $T$ bzgl. $\{\tilde{\mathbf{v}}_j\}$ und $\{\tilde{\mathbf{w}}_j\}$.

(4.5) $A$ und $B$ in $\mathbb{K}^{M\times N}$ heißen äquivalent, wenn es reguläre Matrizen $S \in \mathbb{K}^{N\times N}$ und $R \in \mathbb{K}^{M\times M}$ gibt mit $B = R^{-1}AS$.

(4.6) $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ ist äquivalent zu $D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M\times N}$ mit $r = \operatorname{rang} A$.
$A, B \in \mathbb{K}^{M\times N}$ sind genau dann äquivalent, falls $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

# 4 Lineare Abbildungen – Eigenwerte

(4.7) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißen *ähnlich*, wenn eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $B = S^{-1}AS$ existiert. $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d. h. wenn eine reguläre Matrix $S$ existiert mit

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

(4.8) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* (EW) zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, wenn es $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^N$, $\mathbf{v} \neq 0$ gibt mit $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Dann heißt $\mathbf{v}$ *Eigenvektor* (EV), und $E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^N \colon A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ heißt *Eigenraum*.

(4.9) $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist genau dann diagonalisierbar, falls es eine Basis von $\mathbb{K}^N$ gibt, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht.

(4.10) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_N)$ heißt *charakteristisches Polynom* von $A$.

(4.11) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenvektor von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$

$\chi_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \lambda^n$ ist ein Polynom von Grad $N$ mit

$$\alpha_N = (-1)^N, \qquad \alpha_{N-1} = (-1)^{N-1}\operatorname{Spur}(A), \qquad \alpha_0 = \det A.$$

(4.12) a) Die Vielfachheit $a_\lambda$ eines EW $\lambda$ als Nullstelle von $\chi_A$ heißt *algebraische Vielfachheit*.
b) Die Dimension $g_\lambda = \dim E(\lambda)$ des Eigenraums $E(\lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit*.

# 4 Lineare Abbildungen – Eigenwerte

(4.13) Eigenvektoren einer Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(4.14) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $N$ verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

(4.15) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ähnliche Matrizen. Dann haben sie das gleiche charakteristische Polynom, gleiche Eigenwerte mit gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, gleiche Determinanten und Spuren.

(4.16) Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Dann gilt: $1 \le g_\lambda \le a_\lambda \le N$.

(4.17) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte gilt: $a_\lambda = g_\lambda$. Ist $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ diagonalisierbar und sind alle Eigenwerte reell, so lassen sich auch die Eigenvektoren reell wählen.

(4.18) Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ eine hermitische Matrix, d.h. $A = A^H$ (mit $A^H = \bar{A}^T$). Dann gilt:
a) Die Eigenwerte von $A$ sind reell.
b) Seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ EV zu den EW $\lambda$ und $\mu$ mit $\lambda \ne \mu$, dann gilt: $\mathbf{v}^H\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{v}}_k \mathbf{w}_k = 0$.
Symmetrische reelle Matrizen haben reelle Eigenwerte.

(4.19) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(A) = \det(A - \lambda I_N) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^k$. Dann gilt $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k A^k = 0$.

# 4 Lineare Abbildungen – Orthogonalität

(4.20) a) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ heißen orthogonal, wenn $\mathbf{v}^H\mathbf{w} = 0$.
b) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ heißt Orthogonalsystem, wenn $\mathbf{v}_j^H\mathbf{v}_k = 0$ für $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, m$,
und Orthonormalsystem, wenn zusätzlich $\mathbf{v}_j^H\mathbf{v}_j = 1$ für $j = 1, \dots, m$.
c) Eine Basis $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$ orthonormal sind.

(4.21) Ein Orthogonalsystem $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ ist linear unabhängig.

(4.22) Jeder Vektorraum $W \subset \mathbb{K}^N$ besitzt eine Orthonormalbasis.

(4.23) $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt normal, wenn $A^H A = AA^H$.

(4.24) Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ normal, d.h. $A^H A = AA^H$. Dann ist $A$ diagonalisierbar, und $A$ besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
Hermitische komplexe Matrizen und symmetrische reelle Matrizen sind diagonalisierbar.

(4.25) Sei $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ eine ONB von $\mathbb{C}^N$.
Dann heißt $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{w}_k^H\mathbf{x})\mathbf{w}_k$ Fourier-Entwicklung von $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

(4.26) Sei $W \subset \mathbb{C}^N$ ein Vektorraum. Dann existiert eine lineare Abbildung $P\colon \mathbb{C}^N \to W$ mit $\big(\mathbf{x} - P(\mathbf{x})\big)^H\mathbf{w} = 0$ für $\mathbf{w} \in W$. $P$ heißt *Orthogonal-Projektion*.

# 4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

(4.27) Eine *Metrik* auf einer Menge $X$ ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ mit

$$\begin{array}{lll}
(M1) & d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{(Definitheit)} \\
(M2) & d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x}) & \text{(Symmetrie)} \\
(M3) & d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) & \text{(Dreiecksungleichung).}
\end{array}$$

(4.28) Sei $V$ ein reeller Vektorraum. Eine *Norm* auf $V$ ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow [0,\infty[$ mit

$$\begin{array}{lll}
(N1) & \|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0 & \text{(Definitheit)} \\
(N2) & \|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{v}\| & \text{(Homogenität)} \\
(N3) & \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| & \text{(Dreiecksungleichung).}
\end{array}$$

(4.29) Jede Norm induziert eine Metrik $d(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

(4.30) Ein Skalarprodukt auf $V$ ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{lll}
(S1) & \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \ge 0 \text{ und } \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{(positive Definitheit)} \\
(S2) & \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle & \text{(Symmetrie)} \\
(S3) & \langle\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \alpha\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \beta\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle & \text{(Bilinearität).}
\end{array}$$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Euklidischer Vektorraum*.

(4.31) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$. Dann gilt:

a) $|\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ und $|\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \iff$ $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig.

b) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

c) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ (Minkowski-Ungleichung)

d) $\langle v,w\rangle = 0 \iff \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (Satz des Pytagoras).

# 4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

(4.32) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum.
Zu $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\neq 0$ existiert genau ein Winkel $\varphi\in[0,\pi]$ mit $\cos(\varphi)=\dfrac{\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}\in[-1,1]$.

(4.33) Eine Norm ist genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammgleichung gilt. Dann gilt: $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\dfrac{1}{4}\big(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2-\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2\big)$.

(4.34) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum.
a) $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ heißen *orthogonal* ($\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$), falls $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=0$.
b) $X\subset V$ und $Y\subset V$ heißen orthogonal, wenn $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$ für alle $\mathbf{x}\in X$ und $\mathbf{y}\in Y$
c) $X^\perp=\{\mathbf{v}\in V\mid\langle\mathbf{v},\mathbf{x}\rangle=0$ für alle $\mathbf{x}\in X\}$ heißt *orthogonales Komplement*.

(4.35) $X^\perp$ ist Unterraum von $V$.

(4.36) Sei $W$ Unterraum von einem euklidischen Vektorraum $V$. Dann ist $V=W+W^\perp$ eine direkte Summe, d.h. zu jedem $V$ existiert genau ein $\mathbf{w}\in W$ und ein $\mathbf{w}^\perp\in W^\perp$ mit $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{w}^\perp$, und es existiert eine Orthogonalprojektion $P\colon V\to W$ mit $\mathbf{w}=P\mathbf{v}$, $\mathbf{w}^\perp=\mathbf{v}-P\mathbf{v}$.
Es gilt $W\cap W^\perp=\{0\}$.

(4.37) Für eine Teilmenge $U\subset V$ gilt: $(U^\perp)^\perp=\operatorname{span}U$, und falls $U$ Unterraum, gilt $(U^\perp)^\perp=U$.

# 4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

Karlsruhe Institute of Technology

(4.38) Für die Orthogonalprojektion $P\colon\ V \to W$ gilt:
zu $\mathbf{v} \in V$ ist $P(\mathbf{v})$ die Bestapproximation von $\mathbf{v}$ in $W$, d.h. $\|\mathbf{v} - P(\mathbf{v})\| = \min\limits_{\mathbf{w}\in W} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

(4.39) Eine lineare Abbildung $P\colon\ V \to V$ ist genau dann eine orthogonale Projektion auf $W =$ Bild $(P)$, wenn $P \circ P = P$ und $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, P(\mathbf{w})\rangle$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.40) Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T\colon\ V \to W$ heißt *Isometrie* (längen- und winkelerhaltende Abbildung), falls $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ gilt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.41) Für eine Abbildung $T\colon\ V \longrightarrow W$ ist äquivalent:
a) $T$ Isometrie  b) $\|T\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in V$  c) $\|T\mathbf{v} - T\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.42) Sei $\dim V = \dim W = n$. Dann gilt: $T\colon\ V \to W$ ist genau dann Isometrie, wenn
$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ONB von $V \quad \Longleftrightarrow \quad \{T\mathbf{v}_1, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ ONB von $W$.

(4.43) Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{w}\| = 1$. Die Matrix $H = I_N - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ beschreibt die Spiegelung an $\mathbf{w}^\perp$.

(4.44) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
Dann gilt $\mathbf{y} = H\mathbf{x}$ für die Spiegelung $H = I_n - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ mit $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$.