1 Folgen und Reihen

(1.1) Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1.2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

a) Für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ heißt $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn $a \in \mathbb{R}$ existiert mit:
für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ heißt *Grenzwert* (Limes).

d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn
für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_k| < \varepsilon$ für alle $n, k > N$.

(1.3) Es gilt:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

c) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(1.4) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gilt:

a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

c) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

1 Folgen und Reihen

(1.5) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1.6) Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(1.7) Satz von Bolzano-Weierstraß:
Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(1.8) Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen *Häufungspunkte* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1.9) Jede reelle Cauchy-Folge ist konvergent.

(1.10) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ die n-te *Partialsumme*, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Reihe*.

Konvergente Reihen bilden einen Vektorraum, d.h. wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren, dann konvergieren auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

(1.11) Notwendige Bedingung: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

1 Folgen und Reihen

(1.11) Konvergenz-Kriterien

a) Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall m \geq n \geq N\colon\ \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| < \varepsilon$$

b) Leibniz-Kriterium: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_k \geq 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dann konvergiert die *alternierende* Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$, und es gilt die Einschließung

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k .$$

(1.12) Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

(1.13)

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\iff$ die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ ist beschränkt.

b) Majorantenkriterium: $|a_k| \leq b_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

c) Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0$ und $q < 1$ mit $\Big|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\Big| \leq q$ für $k \geq k_0$.

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

d) Wurzelkriterium: $q < 1$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für $k \geq k_0$ $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

1 Folgen und Reihen

(1.14) Sei $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine *Umordnung* von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

(1.15) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Dann ist jede Umordnung σ ebenfalls absolut konvergent mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$.

(1.16) Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ absolut konvergent, und es gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,.$$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Karlsruhe Institute of Technology

(2.1) Sei $D \subset \mathbb{R}$.

a) $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von D, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $x_n \in D, x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. D' sei die Menge der Häufungspunkte von D.

b) $x_0 \in D$ heißt *innerer Punkt* von D, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset D$. D^0 sei die Menge der inneren Punkte von D.

c) D heißt *offen*, wenn $D = D^0$ ist.

d) D heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R} \setminus D$ offen ist.

e) $\bar{D} = D \cup D'$ heißt *Abschluss* von D.

f) D heißt *beschränkt*, falls $C > 0$ existiert mit $D \subset [-C, C]$.

g) $E \subset D$ heißt *offen in* E, wenn zu jedem $x_0 \in E$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap D \subset E.$$

(2.2) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Wenn zu $x_0 \in D'$ ein $y_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, dann heißt $f(x)$ *konvergent* für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert y_0. Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

b) Einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = y_0 \iff \text{für alle monoton steigenden Folgen } (x_n) \text{ aus } D\setminus\{x_0\} \text{ mit Grenzwert } x_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = y_0 \iff \text{für alle monoton fallenden Folgen } (x_n) \text{ aus } D\setminus\{x_0\} \text{ mit Grenzwert } x_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.3) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt *stetig ergänzbar* in $x_0 \in D'$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert.

b) f heißt *stetig in* $x_0 \in D \cap D'$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

c) f heißt *stetig*, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in D \cap D'$ ist.

(2.4) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D\colon \Big(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \Big)$$

(2.5) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(a) < y < f(b)$. Dann existiert $x_0 \in]a,b[$ mit $f(x_0) = y$.

(2.6) $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend*, wenn für $x, y \in D$ gilt: $x < y \implies f(x) < f(y)$.

Entsprechend: monoton wachsend $x < y \implies f(x) \le f(y)$

monoton fallend $x < y \implies f(x) \ge f(x)$.

(2.7) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann gilt:

a) $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert und streng monoton wachsend.

b) Wenn f stetig ist, dann ist auch f^{-1} stetig.

(2.8) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a,b])$ beschränkt, und es existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad\qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.9) $D \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist.

(2.10) $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x, x_0 \in D\colon \qquad \Big(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big).$$

(2.11) Sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

(2.12) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Zu $x_0 \in D \cap D'$ heißt $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *Differenzenquotient*.

f heißt *differenzierbar* im Punkt x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

(2.13) Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt x_0. Dann ist f stetig in x_0.

(2.14) Sei $\varphi\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) $\varphi(h) = o(h^k) \iff \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(h)}{h^k} = 0$

b) b) $\varphi(h) = O(h^k) \iff \exists\, C > 0, h_0 > 0$ mit $|\varphi(h)| \leq C h^k$ für $|h| < h_0, h \in D$

Es gilt $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.15) Seien $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D \cup D'$. Dann gilt:

a) Die Ableitung ist linear: $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

b) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *(Produktregel)*

c) Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$

(Quotientenregel)

(2.16) Seien $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}, g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ mit $y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$.
Sei f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in y_0. Dann gilt:

a) $g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar in x_0 mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

b) Sei zusätzlich f injektiv und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion in y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.17) Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

a) x_0 ist ein *globales Maximum* von f in D, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in D$.

b) x_0 ist ein *strenges globales Maximum* von f in D, wenn $f(x) < f(x_0)$ für $x \in D \setminus \{x_0\}$.

c) x_0 ist ein *lokales Maximum* von f, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in D \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

d) x_0 ist ein *strenges lokales Maximum* von f, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) < f(x_0)$ für $x \in D \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad x \neq x_0$.

Analog werden Minimima definiert. Ein Extremum ist ein Minimum oder ein Maximum.

(2.18) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei $x_0 \in]a,b[$ ein lokales Extremum. Dann gilt:
Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung).

(2.19) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$.

a) Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$ (Satz von Rolle).

b) Es existiert $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (Mittelwertsatz).

(2.20) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wenn für eine kritische Stelle $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$ zusätzlich $f''(x_0) > 0$ gilt, dann ist x_0 ein strenges lokales Minimum.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.21) Seien $f, g\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und für $x_0 \in]a,b[$ gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt die Regel von l'Hospital:

Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2.22) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt *konvex*, wenn für $a \le x_1 < x \le x_2 \le b$ gilt $f(x) \le f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x)\big)$.

b) f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

c) f heißt *streng konvex*, wenn für $x_1 < x < x_2$ gilt $f(x) < f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big)$.

d) f heißt *streng konkav*, falls $-f$ streng konvex ist.

(2.23) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, und sei $x_0 \in [a,b]$ ein lokales Minimum. Dann ist x_0 ein globales Minimum.

(2.24) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

a) $f''(x) > 0$ für $x \in]a,b[\implies f(x)$ streng konvex.

b) $f''(x) < 0$ für $x \in]a,b[\implies f(x)$ streng konkav.

(2.25) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in]a,b[$. Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit f konvex in $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und f konkav in $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ (oder umgekehrt), dann heißt x_0 *Wendepunkt* von f.

(2.26) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

a) Wenn $x_0 \in]a,b[$ ein Wendepunkt ist, dann gilt $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung).

b) Wenn zusätzlich f dreimal stetig differenzierbar ist, und wenn $f'''(x_0) \neq 0$ ist, dann ist x_0 ein Wendepunkt (hinreichende Bedingung).

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.29) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in]a,b[$. Dann existiert eine Darstellung

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x;x_0)$$

mit dem *Taylor-Polynom* n-ten Grades $T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x_0)(x-x_0)^k$ und dem Restglied $R_n(x;x_0) = o\big((x-x_0)^n\big)$.
Wenn f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist, dann existiert zu jedem $x \in [a,b]$ eine Zwischenstelle $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ mit $0 < \theta < 1$ und

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(\xi)(x-x_0)^{n+1}\,.$$

(2.30) $\cos x$ hat genau eine kleinste Nullstelle $x_0 \in]0,\sqrt{6}[$. Wir definieren $\pi = 2x_0$.

(2.31) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $x^* \in]a,b[$ eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ in der Nähe von x^* quadratisch, d.h. falls $|x_0 - x^*|$ klein genug, gilt $|x_{n+1} - x^*| < C\,|x_n - x^*|^2$.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.32) Zu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ und x_0 sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ die *Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt* x_0 mit den *Koeffizienten* $a_0, a_1, a_2, \ldots$

(2.33) Für eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ist der *Konvergenzradius* r definiert durch:

a) $r = 0$, falls die Reihe nur für $x = x_0$ konvergiert;

b) $r = \infty$, falls die Reihe für alle x konvergiert;

c) falls die Reihe für ein x_1 absolut konvergiert und für ein x_2 divergiert, dann existiert $r = \sup\{\rho > 0 \colon \text{die Reihe konvergiert absolut für alle } x \text{ mit } |x-x_0| < \rho\}$.

(2.34) Für die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ gilt:

a) Wenn $c = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, dann ist der Konvergenzradius $r = \begin{cases} 0 & c = \infty \\ \frac{1}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$

b) Wenn $d = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert, dann ist der Konvergenzradius $r = \begin{cases} 0 & d = \infty \\ \frac{1}{d} & d \neq 0 \\ \infty & d = 0 \end{cases}$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

(2.35) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Wenn für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert, dann ist die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ punktweise definiert *(punktweise Konvergenz)*.

b) Sei $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in D}|f(x)|$. Wenn zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ gilt, dann ist die Konvergenz *gleichmäßig* auf D *(gleichmäßige Konvergenz)*.

(2.36) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig für $n \in \mathbb{N}$, und sei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ wohldefiniert.
Wenn $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig konvergiert, dann ist f stetig.

(2.37) Seien $f_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(D \subset \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ und sei $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent gegen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für $x \in D$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig.

(2.38) Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Dann ist f stetig für $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, die abgeleitete Potenzreihe $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius r, und f ist differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$.

(3.1) $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F differenzierbar auf $[a,b]$ ist, und wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$ gilt.

3 Integration

(3.1) a) $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ heißt eine *Zerlegung* von $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle. $\mathscr{Z}$ (oder $\mathscr{Z}[a,b]$) sei die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

b) $|Z| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|$ heißt *Feinheit* der Zerlegung.

c) $R(f,Z,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) f(\xi_i)$ *Riemann-Summe* zu Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

d) $U(f,Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ *Untersumme*

e) $O(f,Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ *Obersumme*

(3.2) a) Die Grenzwerte $U(f) = \sup\{U(f,Z) \mid Z \in \mathscr{Z}\}$ bzw. $O(f) = \inf\{O(f,Z) \mid Z \in Z\}$ heißen *Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral*.

b) Falls $U(f) = O(f)$, dann heißt f *(Riemann)-integrierbar*. Wir schreiben für das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = U(f) = O(f)\,.$$

(3.3) a) Sei $a < c < b$. Dann gilt:
f über $[a,b]$ integrierbar $\iff$ f über $[a,c]$ integrierbar und f über $[c,b]$ integrierbar.
Es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

b) Das Integral ist linear: $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.

3 Integration

(3.3) c) Das Integral ist monoton: $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(3.4) Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z \in \mathscr{Z}$ existiert mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$.

(3.5) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.

a) f monoton $\implies$ f integrierbar.

b) f stetig $\implies$ f integrierbar.

(3.6) Eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Intervallen $]a_k, b_k[$ mit $a_k > b_k$, $N \subset \bigcup]a_k, b_k[$ und $\sum_k (b_k - a_k) \leq \varepsilon$ existiert.

(3.7) Seien $f, g\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Dann heißt $f = g$ *fast überall*, wenn $\{x \in \mathbf{R}\colon f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

(3.8) Eine Funktion $\phi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn endlich viele disjukte Intervalle I_k existieren, so dass $\phi(x) \equiv c_k$ für $x \in I_k$ gilt.

(3.9) a) Eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow [0,\infty]$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, wenn eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen ϕ_k mit $\lim_{k\longrightarrow\infty} \phi_k = f$ fast überall und $\int_{\mathbf{R}} \phi_k(x)dx \leq C < \infty$ existiert. Dann ist $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_{\mathbf{R}} \phi_k(x)dx$.

a) Eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow [-\infty,\infty]$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, wenn $f^+ = \max\{0, f\}$ und $f^- = \max\{0, -f\}$ Lebesgue-integrierbar sind. Es ist $\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int\limits_{\mathbf{R}} f^+(x)dx - \int_{\mathbf{R}} f^-(x)dx$.

3 Integration

(3.10) $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F differenzierbar auf $[a,b]$ ist, und wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$ gilt.

(3.11) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

(3.11) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion zu f, d.h. $F' = f(x)$.

(3.12) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(3.13) Seien $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Dann gilt: $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ (Partielle Integration).

(3.14) Sei $g\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ stetig differenzierbar, und sei $f\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt: $\displaystyle\int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$ (Substitutionsregel).

(3.12) Sei $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r.

Dann gilt $\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k+1)} (x - x_0)^{k+1} + C$ für $x_0 - r < x < x_0 + r$.

(3.13) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$.
Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)p(x)dxx = f(\xi) \int_a^b p(x)dx$.

(3.14) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in]a,b[$.
Dann gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^n + R_n(x;x_0)$ mit dem Restglied

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(3.15) Ein rationales Polynom $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit grad $P <$ grad Q besitzt eine *Partialbruch-Zerlegung*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_{j1}}{x - x_j} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jr_j}}{(x-x_j)^{r_j}} \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\beta_{k1} + \gamma_{k1} x}{(x-c_k)^2 + d_k^2} + \cdots + \frac{\beta_{ks_k} + \gamma_{ks_k} x}{\left((x-c_k)^2 + d_k^2\right)^{s_k}} \right).$$

3 Integration – Uneigentliche Integrale

(3.16) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt *lokal integrierbar*, wenn f über jedes kompakte Intervall $[a,b] \subset D$ integrierbar ist.

b) Sei f über $[a,\infty[$ lokal integrierbar. Dann definiere $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

c) Sei f über $\mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann definiere $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$

d) Sei f über $]a,b[$ lokal integrierbar. Dann definiere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a+} \int_z^c f(x)\,dx + \lim_{z\to b-} \int_c^z f(x)\,dx$$

(3.17) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists C > a\colon \quad \Big|\int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx\Big| < \varepsilon$ für $z_2 > z_1 > C$

b) Wenn $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ existiert *(absolute Konvergenz)*, dann existiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$.

c) Sei $|f(x)| \le g(x)$ für $x \ge a$ und sei $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent, dann ist $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

d) Gilt $0 \le g(x) \le f(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent.

3 Integration – Rotationskörper

(3.18)

a) Zu einer Menge $K \subset \mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $Q(x) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K \right\}$ der *Querschnitt*.

b) Zu $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x) \right\}$ ein Rotationskörper.

c) $F(x) = |Q(x)|$ bezeichnet die Querschnittsfläche, und $V = |K|$ das Volumen.

(3.19) Zu einer Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ist

$$V(Z) = \sum_{i=1}^{n} |Q(x_i)|(x_i - x_{i-1})$$

die entsprechende Riemannsumme für V.

(3.20) Haben jeweils zwei Körper K und K' die gleiche Querschnittsfläche $F(x) = |Q(x)| = |Q'(x)|$, dann sind ihre Volumen gleich ($V = |K| = |K'|$) *(Prinzip von Cavalieri)*.

Das Volumen berechnet sich durch $V = \int_a^b |Q(x)|\,dx$.

Für einen Rotationskörper berechnet sich die Mantelfläche durch

$$M = \pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

3 Integration – Kurven

(3.21) a) Eine stetige Funktion $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung einer Kurve.
b) Wenn jede Komponente von $\mathbf{c}$ stetig differenzeirbar ist, heißt $\mathbf{c}$ eine C^1-Kurve.
c) Die Kurve heißt *glatt*, wenn $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a,b]$.

(3.22) Zu jeder Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b\}$ sei $L(Z) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$ die Länge des Polygonzugs $\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \ldots, \mathbf{c}(t_m)$. Wenn $\{L(Z) \mid Z \in \mathscr{Z}[a,b]\}$ beschränkt ist, dann heißt die Kurve *rektifizierbar* und $L(\mathbf{c}) = \sup\{L(Z) \mid Z \in \mathscr{Z}[a,b]\}$ heißt *Länge der Kurve*.

(3.23) Jede C^1-Kurve ist rektifizierbar, und für die Länge gilt $L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt$.

(3.24) Eine *Umparameterisierung* einer Kurve $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine stetige, bijektive, monoton wachsende Funktion $h\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$.

(3.25) Die Länge einer C^1-Kurve ist parameterisierungsvariant.

(3.26) a) Sei $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Kurve. Dann heißt $S(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\|\,dt$ *Bogenlängenfunktion*.
b) Wenn $\mathbf{c}$ eine glatte C^1-Kurve ist, dann ist $S^{-1}\colon [0, L(\mathbf{c})] \longrightarrow [a,b]$ eine Umparameterisierung, und $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}\big(S^{-1}(s)\big)$ heißt *Parameterisierung nach der Bogenlänge*.
c) $\kappa(s) = \|\tilde{\mathbf{c}}''(s)\|$ heißt *Krümmung* von $\mathbf{c}$.

3 Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

(3.27) a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit der Periode T*, falls $f(t+T)=f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

b) Eine Reihe der Form $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big)$ heißt *Fourier-Reihe*.

(3.28) Für *trigonometrische Polynome*

$$f_N(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)]=\sum_{k=-N}^{N}\gamma_k\exp(ik\omega t)$$

gilt

$$\gamma_0=\frac{1}{2}a_k,\ \gamma_k=\frac{1}{2}(a_e-ib_k),\ \gamma_{-k}=\bar{\gamma}_k,\ a_0=2\gamma_0,\ a_k=2Re(\gamma_k),b_k=2Im(\gamma_k)\ (k=1,2,\dots,N).$$

(3.29) Es gilt für $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

a) $\displaystyle\int_0^T\exp(ik\omega t)\exp(-i\,\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T & k=\ell\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^T\cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T/2 & k=\ell\neq 0\\ T & k=\ell=0\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$

c) $\displaystyle\int_0^T\sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T/2 & k=\ell\neq 0\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$

d) $\displaystyle\int_0^T\sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt=0.$

3 Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

(3.30) Sei $f\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig (d.h., es existiert eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, so dass $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig ist). Dann heißt

$$\mathscr{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big)$$

mit $a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ und $b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ *Fourierreihe zu f.*

(3.31) Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\mathscr{F}(f)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big).$$

(3.32) Sei $\mathbb{T}_N = \operatorname{span}\Big\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \cos(N\omega t), \sin(N\omega t) \Big\}$ der Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\le N$, und sei $\mathscr{F}_N(f) \in \mathbb{T}_N$ die Fourier-Approximation von f. Dann gilt

$$\|f - \mathscr{F}_N(f)\| \le \|f - g\| \qquad \text{für alle } g \in \mathbb{T}_N$$

bzgl. der Norm $\|g\| = \left(\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \big(g(t)\big)^2\,dt \right)^{1/2}$.

4 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

(4.1) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, und sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) f heißt stetig in $\mathbf{x}$, wenn für jede Folge $\mathbf{x}_k \in U$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x})$.

b) f heißt *partiell differenzierbar nach der i-ten Komponente*, wenn die Funktion $g_k(t) = f(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_N)$ differenzierbar ist.

(4.2) Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$.

(4.3)

a) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x})\right) \in \mathbb{R}^{1\times N}$ heißt Gradient.

b) $H_f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right)_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt Hesse-Matrix.

(4.4) Sei $\mathbf{x} \in U$ lokales Minimum von f. Dann gilt $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$ *(Notwendige Bedingung)*.

(4.5) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, und sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ zweimal stetig differenzierbar.
Sei $\mathbf{x} \in U$ ein *kritischer Punkt*, d.h. $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$. Dann gilt:

a) Ist $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit, dann ist $\mathbf{x}$ ein strenges lokales Minimum von f.

b) Ist $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit, dann ist $\mathbf{x}$ strenges lokales Maximum von f.

c) Ist $H_f(\mathbf{x})$ indefinit, dann ist $\mathbf{x}$ keine Extremstelle.

4 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

(4.6) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
$\mathbf{x}^* \in U$ heißt *lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung* $g(\mathbf{x}) = 0$, wenn $\delta > 0$ existiert mit $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in U$ mit $g(\mathbf{x}) = 0$ und $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$.

(4.7) $L\colon U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$ heißt *Lagrange-Funktion*.

(4.8) Sei $\mathbf{x}^* \in U$ lokales Minimum von f unter $g(\mathbf{x}) = 0$, und sei $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^*) \neq 0$.
Dann existiert ein Lagrange-Parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^*) + \lambda^* \operatorname{grad} g(\mathbf{x}^*) = 0 \,.$$

(4.9) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, und sei $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^K$. $\mathbf{f}$ heißt (vollständig oder total) *differenzierbar* in $\mathbf{x}$, wenn eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{K \times N}$ existiert mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = o(\mathbf{x} - y)$,
(d.h. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{|\mathbf{h}|}\big(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}h\big) = \mathbf{0}\big)$. Dann heißt $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ Jacobi-Matrix.

(4.10) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Wenn alle partiellen Ableitungen in U existieren und in $\mathbf{x}$ stetig sind, dann ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, und es gilt: $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,K,\; j=1,\dots,N}$.

(4.11) Seien $U \subset \mathbb{R}^N, D \subset \mathbb{R}^K$ offen, $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^M, \mathbf{g}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^N, \mathbf{x} \in D$.
Sei $\mathbf{g}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in U$, und $\mathbf{f}$ in $\mathbf{y}$ differenzierbar.
Dann ist $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, und es gilt $J_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{M,K}$.