1 Einführung

(1.1) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ und $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Betrachte

(P) Minimiere $f(x)$ unter der Bedingung $x \in \mathcal{M}$.

a) $\mathcal{M}$ heißt die Menge der *zulässigen Punkte*.

b) (P) heißt *zulässig*, falls $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

c) $x^* \in \mathbb{R}^N$ heißt *Lösung* von (P), wenn
   i) x^* *zulässig* ist, d.h. $x^* \in \mathcal{M}$, und
   ii) x^* *optimal* ist, d.h. $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}$.

   In diesem Fall heißt (P) *lösbar*, und wir setzen

$$\min(\mathrm{P}) = \min_{x\in\mathcal{M}} f(x) = f(x^*)\,.$$

   Falls die Lösung eindeutig ist, definieren wir

$$x^* = \arg\min_{x\in\mathcal{M}} f(x)\,.$$

d) Im Allgemeinen defininieren wir

$$\inf(\mathrm{P}) = \begin{cases} \inf\limits_{x\in\mathcal{M}} \quad f(x) & \text{falls} \quad \mathcal{M} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{falls} \quad \mathcal{M} = \emptyset\,. \end{cases}$$

2.1 Konvexe Mengen und Polyeder – Konvexe Mengen

(2.1) a) Eine Menge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *linearer Teilraum / Unterraum*, wenn

$$x, y \in \mathcal{V}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda x + \mu y \in \mathcal{V}\,.$$

b) Eine Menge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *affiner Teilraum*, wenn

$$x, y \in \mathcal{V}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{V}\,.$$

c) Eine Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *konvex*, wenn

$$x, y \in \mathcal{K}, \quad \lambda \in [0,1] \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{K}\,.$$

d) Eine Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *Kegel*, wenn

$$x \in \mathcal{C}, \quad \lambda \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda x \in \mathcal{C}\,.$$

(2.2) a) $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann ein linearer Teilraum, wenn

$$x^k \in \mathcal{V},\ \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,\ K \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, x^k \in \mathcal{V}\,.$$

b) $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn

$$x^k \in \mathcal{V},\ \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,\ K \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, x^k \in \mathcal{V}\,.$$

c) $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann konvex, wenn

$$x^k \in \mathcal{K},\ \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K,\ K \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, x^k \in \mathcal{K}\,.$$

d) $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann ein *konvexer Kegel*, wenn

$$x^k \in \mathcal{C},\ \lambda_k \geq 0,\ k = 1, \dots, K,\ K \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, x^k \in \mathcal{C}\,.$$

2.1 Konvexe Mengen und Polyeder – Konvexe Mengen

(2.5) a) Ein konvexer Kegel $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *endlich erzeugt*,
wenn eine endliche Teilmenge $\mathcal{S} = \{u^1, ..., u^K\} \subset \mathbb{R}^N$ existiert mit

$$\mathcal{C} = \text{cone}(\mathcal{S}) = \Big\{ \sum_{k=1}^{K} \lambda_k u^k : \ \lambda_k \geq 0 \Big\} = \{U\lambda : \ \lambda \geq 0\} .$$

Dabei ist $U = (u^1|...|u^K) \in \mathbb{R}^{N \times K}$.

b) Eine Menge $\mathcal{E} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : a^\top x = \gamma\big\}$ mit $a \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ heißt *(Hyper-)Ebene* im $\mathbb{R}^N$.

c) Eine Menge $\mathcal{H} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : a^\top x \leq \gamma\big\}$ mit $a \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossener Halbraum*.

d) Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ heißt *polyedral* (oder auch *Polyeder*), wenn sie als Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen darstellbar ist, d. h. wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^K$ existiert mit

$$\mathcal{M} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b\big\} .$$

e) Beschränkte Polyeder $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ heißen *Polytope*.

2.2 Konvexe Mengen – Satz von Weyl / Farkas Lemma

(2.6) **Satz von Weyl**
Jeder endlich erzeugte konvexe Kegel $\mathcal{C} = \{U\lambda\colon\ \lambda \geq 0\}$ ist polyedral und von der Form $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^N\colon\ Ax \leq 0\}$.
Insbesondere sind endlich erzeugte konvexe Kegel abgeschlossen.

(2.7) Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ eine konvexe, abgeschlossene Menge, $\mathcal{K} \neq \emptyset$.
Dann existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ genau ein $x^* \in \mathcal{K}$ mit $\|x - x^*\| \leq \|x - z\|$ für alle $z \in \mathcal{K}$, und x^* ist eindeutig durch $(x - x^*)^\top (z - x^*) \leq 0$ für alle $z \in \mathcal{K}$ charakterisiert.

(2.8) **Trennungssatz**
Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ eine konvexe und abgeschlossene Menge, $\mathcal{K} \neq \emptyset$, und $x \notin \mathcal{K}$.
Dann existiert eine Hyperebene, die x und $\mathcal{K}$ trennt, d. h.
es existiert $a \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$a^\top z \leq \gamma < a^\top x \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}\,.$$

Ist $\mathcal{K}$ sogar ein konvexer Kegel, so kann $\gamma = 0$ gewählt werden.
Wenn $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $\mathcal{K} \neq \emptyset$, und $x \in \partial\mathcal{K}$ ist, dann existiert $a \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$, mit

$$a^\top z \leq a^\top x \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}\,.$$

(2.9) **Lemma von Farkas**
Seien $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$ gegeben.
Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) $\big\{x \in \mathbb{R}^N\colon Ax = b,\ x \geq 0\big\} \neq \emptyset$

(ii) $\big\{y \in \mathbb{R}^K\colon A^\top y \leq 0,\ b^\top y > 0\big\} \neq \emptyset$

2.3 Konvexe Mengen – Hauptsatz der Polyedertheorie

(2.10) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ sei beliebige konvexe Menge.

a) $x \in \mathcal{M}$ heißt *Ecke* / *Extremalpunkt* von $\mathcal{M}$, wenn sich x nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte von $\mathcal{M}$ darstellen lässt, d. h., wenn gilt:
$$y, z \in \mathcal{M}\,, \quad \lambda \in (0,1)\,, \quad x = \lambda y + (1-\lambda) z \quad \Rightarrow \quad y = z\,.$$

b) Ein Vektor $u \in \mathbb{R}^N$, $u \neq 0$, heißt *freie Richtung* von $\mathcal{M}$, wenn es $x \in \mathcal{M}$ gibt, so dass der ganze Strahl $\{x + tu : t \geq 0\}$ zu $\mathcal{M}$ gehört.

c) Eine freie Richtung $u \in \mathbb{R}^N$, $u \neq 0$, heißt *extremale Richtung* von $\mathcal{M}$, wenn sie sich nicht als echte Konvexkombination zweier linear unabhängiger freier Richtungen schreiben lässt, d. h., wenn gilt:
$$v, w \text{ freie Richtungen}, \lambda \in (0,1)\,,\ u = \lambda v + (1-\lambda) w \quad \Rightarrow \quad v, w \text{ linear abhängig}\,.$$

Strahlen der Form
$$\mathcal{S} = \{x + tu : t \geq 0\} \subset \mathcal{M}$$
mit Ecke $x \in \mathcal{M}$ und extremaler Richtung u heißen *Extremalstrahlen*.

Mit $\mathrm{extrP}(\mathcal{M})$ bezeichnen wir die Menge aller Extremalpunkte von $\mathcal{M}$.

Mit $\mathrm{extrS}(\mathcal{M})$ bezeichnen wir die Vereinigung aller Extremalstrahlen von $\mathcal{M}$.

2.3 Konvexe Mengen – Hauptsatz der Polyedertheorie

(2.11) Ein Polyeder $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax \le b\}$ hat nur endlich viele Ecken.

(2.12) Sei $\mathcal{J} \subset \{1, ..., K\}$, $\mathcal{J} \ne \emptyset$.
Dann heißt $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} = \{x \in \mathcal{M} : (Ax)_k = b_k \text{ für } k \in \mathcal{J}\}$ eine *Seite* von $\mathcal{M}$.

(2.13) Es gilt $\operatorname{extrP}(\mathcal{M}_{\mathcal{J}}) \subset \operatorname{extrP}(\mathcal{M})$ und $\operatorname{extrS}(\mathcal{M}_{\mathcal{J}}) \subset \operatorname{extrS}(\mathcal{M})$.

(2.15) Für den *relativen Rand*

$$\partial_{\mathrm{rel}}\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{M} \ne \emptyset \text{ und } \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap (\operatorname{affine}\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}) \ne \emptyset \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

eines Polyeders gilt

$$\partial_{\mathrm{rel}}\mathcal{M} \subset \bigcup \Big\{\mathcal{M}_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \subset \{1, ..., K\},\ \dim \mathcal{M}_{\mathcal{J}} < \dim \mathcal{M}\Big\}\,.$$

(2.16) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $\mathcal{M} \ne \emptyset$. Dann ist das *relative Innere*

$$\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} : \text{ es exisitert ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \operatorname{affine}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}\}$$

nicht leer.

(2.18) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $\mathcal{M} \ne \emptyset$ und $\mathcal{M}$ geradenfrei. Dann gilt $\mathcal{M} \subset \operatorname{conv} \partial_{\mathrm{rel}}\mathcal{M}$.

(2.19) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ ein geradenfreies Polyeder. Dann ist $\mathcal{M} = \operatorname{conv}\big\{\operatorname{extrP}(\mathcal{M}) \cup \operatorname{extrS}(\mathcal{M})\big\}$.

(2.20) Jedes (nichtleere) Polytop $\mathcal{M}$ ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

(2.21) Ein (nichtleerer) Polyeder $\mathcal{M}$ ist genau dann geradenfrei, wenn er Ecken besitzt.

3 Existenz- und Dualitätstheorie für Lineare Programme

(3.1) Seien $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$ und $c \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Betrachte

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimiere } c^\top x \text{ auf } \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon Ax = b\,,\ x \geq 0\}\,.$$

Wenn $\mu^* := \inf\{c^\top x : x \in \mathcal{M}\} > -\infty$, dann gilt:

a) Wenn (P) zulässig ist (d.h. $\mathcal{M} \neq \emptyset$), dann ist (P) auch lösbar.

b) Falls (P) lösbar ist, so existiert auch eine Ecke als Lösung.

Das duale Problem zu (P) lautet

$$\text{(D)} \qquad \text{Maximiere } b^\top y \text{ auf } \mathcal{M}^* = \{y \in \mathbb{R}^K \colon A^\top y \leq c\}\,.$$

(3.4) Sei $x \in \mathcal{M}$ und $y \in \mathcal{M}^*$. Dann gilt $b^\top y \leq c^\top x$.

(3.6) **Dualitätssatz**

a) (P) und (D) zulässig $\quad\Rightarrow\quad$ (P) und (D) lösbar und $\min(\text{P}) = \max(\text{D})$

b) (P) zulässig und (D) nicht zulässig $\quad\Rightarrow\quad$ $\inf(\text{P}) = -\infty$.

c) (D) zulässig und (P) nicht zulässig $\quad\Rightarrow\quad$ $\sup(\text{D}) = \infty$

(3.7) Primale Lösungen x^* und duale Lösungen y^* sind komplementär:

$$x_n^* = 0 \text{ oder } (A^\top y^* - c)_n = 0 \text{ für } n = 1, ..., N.$$

4.1 Anwendungen: Netzwerkflussprobleme

(4.1) a) Eine Kapazitätsmatrix $C = (c_{kn}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $c_{kn} \geq 0$ beschreibt einen Graphen mit Knoten $1,\dots,N$ und Kanten $\{(k,n)\colon c_{kn} > 0\}$ mit den Eigenschaften

1) $c_{kn}c_{nk} = 0$, $c_{nn} = 0$
2) $c_{k1} = 0$, $c_{Nn} = 0$
3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_{kn} > 0$, $n = 2,\dots,N$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_{kn} > 0$, $k = 1,\dots,N-1$

b) Ein Fluss $X = (x_{kn}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ zu C ist eine Matrix mit $0 \leq x_{kn} \leq c_{kn}$ und

$$\sum_{k=1}^{N} x_{kn} = \sum_{k=1}^{N} x_{nk} \quad \text{für alle } n = 2,\dots,N-1\,.$$

c) $W(X) = \sum_{n=1}^{N} x_{1n}$ heißt *Wert* des Flusses.

(4.2) Für einen Fluss gilt $\sum_{n=1}^{N} x_{1n} = \sum_{k=1}^{N} x_{kN}$.

Netzwerksflussoptimierungsproblem

Maximiere $W(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_{kN}$ unter $0 \leq x_{kn} \leq c_{kn}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_{kn} = \sum_{k=1}^{N} x_{nk}$ für alle $n = 2,\dots,N-1$.

4.1 Anwendungen: Netzwerkflussprobleme

(4.3) Ein *Schnitt* (J^-, J^+) ist eine Zerlegung $J^+ \cup J^- = \{1, \dots, N\}$ mit $J^+ \cap J^- = \emptyset$, $1 \in J^-$, $N \in J^+$. Die *Kapazität* eines Schnittes ist $K(J^-, J^+) := \sum_{(k,n) \in J^- \times J^+} c_{kn}$.

(4.4) Für jeden Schnitt (J^-, J^+) und jeden Fluss X gilt

$$W(X) = \sum_{(k,n) \in J^- \times J^+} x_{kn} - \sum_{(k,n) \in J^- \times J^+} x_{nk} \leq K(J^-, J^+).$$

(4.5) Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$$\max\big\{W(X) : X \text{ Fluss}\big\} = \min\big\{K(J^-, J^+) : (J^-, J^+) \text{ Schnitt}\big\}$$

(4.6) Ein *ungesättigter Pfad vom Knoten j zum Knoten k* ist ein Indexvektor $(p_1, \dots, p_R)$ mit $p_r \in \{1, \dots, N\}$, $r = 1, \dots, R$, $p_1 = j$, $p_R = k$, und für jedes $r = 1, \dots, R-1$ gilt:

a) $x_{p_r p_{r+1}} < c_{p_r p_{r+1}}$ falls $c_{p_r p_{r+1}} > 0$

b) $x_{p_{r+1} p_r} > 0$ falls $c_{p_r p_{r+1}} = 0$

(4.7) Sei X ein maximaler Fluss, und setze

$$J^- := \{1\} \cup \big\{k \in \{2, \dots, N\} : \text{es gibt einen ungesättigten Pfad von 1 nach } k\big\}.$$

Dann gilt: $N \notin J^-$, (J^-, J^+) mit $J^+ = \{1, ..., N\} \setminus J^-$ ist ein Schnitt, und $W(X) = K(J^-, J^+)$.

4.1 Anwendungen: Netzwerkflussprobleme

Algorithmus von Ford-Fulkerson

S0) Wähle Fluss X (z. B. $X = 0$)

S1) $J^- = \{1\}$

S2) Wähle (j, k) mit $j \in J^-$, $k \notin J^-$
mit $x_{jk} < c_{jk}$ falls $c_{jk} > 0$ oder $x_{kj} > 0$ falls $c_{jk} = 0$
falls kein solches (j, k) existiert: STOP (X maximal)

S3) Setze $J^- := J^- \cup \{k\}$ und falls $N \notin J^-$ gehe zu S2).

S4) Erzeuge ungesättigten Pfad $(p_1, \dots, p_R)$ mit $p_1 = 1$, $p_R = N$, $p_r \in J^-$ und bestimme $d > 0$ mit

$$d = \min\left(\left\{c_{p_r p_{r+1}} - x_{p_r p_{r+1}} : c_{p_r p_{r+1}} > 0\right\} \cup \left\{x_{p_{r+1} p_r} : c_{p_r p_{r+1}} = 0\right\}\right)$$

S5) Setze

$$\begin{aligned} x_{p_r p_{r+1}} &:= x_{p_r p_{r+1}} + d \text{ für } c_{p_r p_{r+1}} > 0 \\ x_{p_{r+1} p_r} &:= x_{p_{r+1} p_r} - d \text{ für } c_{p_r p_{r+1}} = 0 \end{aligned}$$

und gehe zu S1).

4.2 Anwendungen: Matrix-Spiele

(4.8) Ein Matrix-Spiel zweier Personen P_1 und P_2 wird durch $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ bestimmt, wobei a_{kn} ausgezahlt wird, falls P_1 den Spielzug n und und P_2 den Spielzug k ausführt.
Seien $x \in \mathcal{M}_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \colon e^\top x = 1,\ x \geq 0\}$ und $y \in \mathcal{M}_2 = \{y \in \mathbb{R}^K \colon e^\top y = 1,\ y \geq 0\}$ zulässige Strategien. Dann ist $\Phi(x,y) = y^\top Ax$ die erwartete mittlere Auszahlung.

(4.9) Es gilt $\max_{y\in\mathcal{M}_2} \Phi(x,y) = \max_{k=1,\dots,K}(Ax)_k$ für festes $x \in \mathbb{R}^N$.
Es gilt $\min_{x\in\mathcal{M}_1} \Phi(x,y) = \min_{n=1,\dots,N}(A^\top y)_n$ für festes $y \in \mathbb{R}^K$.

(4.10) Es gibt optimale Strategien $x^* \in \mathcal{M}_1$ und $y^* \in \mathcal{M}_2$ mit

$$\Phi(x^*,y) \leq \Phi(x^*,y^*) \leq \Phi(x,y^*) \qquad \text{für alle } \ x \in \mathcal{M}_1 \text{ und } y \in \mathcal{M}_2\,,$$

und es gilt

$$\Phi(x^*,y^*) = \min_{x\in\mathcal{M}_1} \max_{y\in\mathcal{M}_2} \Phi(x,y) = \max_{y\in\mathcal{M}_2} \min_{x\in\mathcal{M}_1} \Phi(x,y)\,.$$

Falls der Wert des Spiels $\Phi(x^*,y^*) = 0$ ist, heißt das Spiel *fair*.

(4.11) Falls $A = -A^\top$ schiefsymmetrisch, so ist der Wert der Spiels $\Phi(x^*,y^*) = 0$.

(4.12) Das Spiel heißt *Sattelpunkt-Spiel*, falls

$$\min_{n=1,\dots,N} \max_{k=1,\dots,K} a_{kn} = \max_{k=1,\dots,K} \min_{n=1,\dots,N} a_{kn}\,.$$

(4.13) Sattelpunkt-Spiele besitzen eine optimale reine Strategie $x^* = e^s$ und $y^* = e^r$ mit

$$a_{rs} = \min_{n=1,\dots,N} \max_{k=1,\dots,K} a_{kn}\,.$$

5 Das Simplex-Verfahren

Seien $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$ und $c \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Betrachte

(P) Minimiere $c^\top x$ auf $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon Ax = b,\ x \geq 0\}$.

(5.1) Zu $J \subset \{1, ..., N\}$ definiere $A_J = (a_{*j})_{j \in J}$. Sei A_J invertierbar.
Dann heißt $x \in \mathbb{R}^N$ mit $x_J = A_J^{-1} b$ und $x_k = 0$ für $k \notin J$ eine *Basislösung*.
Wenn $x \in \mathcal{M}$ ist, heißt x *zulässige Basislösung*. Sie heißt *nicht entartet*, wenn $x_J > 0$ ist.

(5.2) Sei (P) zulässig und beschränkt.
Dann ist (P) lösbar, und es existiert eine zulässige Basislösung als Lösung von (P).
Jede zulässige Basislösung $z \in \mathcal{M}$ ist Ecke des Polyeders $\mathcal{M}$.

Sei $\underline{j} = (j_1, ..., j_K)$ ein Pivotvektor, d. h. $j_k \in \{1, ..., N\}$ und $j_i \neq j_k$ für $i \neq k$.

(5.3) Sei Rang $A = K$. Dann existiert eine Darstellung

$$\{x \in \mathbb{R}^N \colon Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon \hat{A}x = \hat{b}\}$$

mit $\hat{A}(\underline{j}) = I_K$.

Gauß-Jordan-Verfahren: für $k = 1, ..., K$

S1) Wähle $j = j_k \notin \{j_1, ..., j_{k-1}\}$ mit $a_{kj} \neq 0$.

S2) Für $i \neq k$ eliminiere Spalte j durch $a_{in} := a_{in} - (a_{ij}/a_{kj})a_{kn}$ für $n = 1, ..., N$;
für $i \neq k$ setze $b_i := b_i - (a_{ij}/a_{kj})b_k$;
normiere die Zeile k durch $a_{kn} := a_{kn}/a_{kj}$ für $n = 1, ..., N$ und $b_k := b_k/a_{kj}$.

5 Das Simplex-Verfahren

Phase I

Konstruiere einen Pivotvektor $\hat{\underline{j}}$ zu $Ax = b$ mit Basislösung $\hat{z}$, einen Vektor $\hat{c} \in \mathbb{R}^N$ und eine Darstellung $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : \hat{A}x = \hat{b},\ x \geq 0\}$ von $\mathcal{M}$ mit

i) Ist $\hat{\underline{j}} = (j_1, \ldots, j_K)$, so ist $\hat{a}_{*j_k} = e^k$ für $k = 1, \ldots, K$,

ii) $\hat{c}_{j_k} = 0$ für alle $k = 1, \ldots, K$ (also auch $\hat{c}^\top \hat{z} = 0$), und $\hat{b} \geq 0$,

iii) $f(x) = \hat{c}^\top x + f(\hat{z})$ für alle x mit $Ax = b$ und $f(x) = c^\top x$. Setze $\hat{\gamma} = f(\hat{z})$.

Phase II

S1) Falls $\hat{c} \geq 0$ STOP ($\hat{z}$ optimal)

S2) Wähle $s \notin J(\hat{\underline{j}})$ mit $\hat{c}_s < 0$.

S3) Falls $\hat{a}_{*s} \leq 0$ STOP ($\inf(\mathrm{P}) = -\infty$)

S4) Wähle r mit $\hat{a}_{rs} > 0$ und $\hat{b}_r / \hat{a}_{rs} \leq \hat{b}_i / \hat{a}_{is}$ für $i \in \{1, \ldots, K\}$ mit $\hat{a}_{is} > 0$.

S5) Definiere $\tilde{\underline{j}}$ mit $\tilde{j}_k = \hat{j}_k$ für $k \neq r$ und $\tilde{j}_r = s$

S6) Gauß-Jordan-Schritt: setze $\tilde{a}_{rn} = \hat{a}_{rn} / \hat{a}_{rs}$ für $n = 1, \ldots, N$ und $\tilde{b}_r = \hat{b}_r / \hat{a}_{rs}$,
für $i \neq r$ setze $\tilde{a}_{in} = \hat{a}_{in} - \hat{a}_{is}\tilde{a}_{rn}$, $\tilde{b}_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{is}\tilde{b}_r$, $\tilde{c}_n = \hat{c}_n - \hat{c}_s\tilde{a}_{rn}$ für $n = 1, \ldots, N$,
$\tilde{z}_{\tilde{j}_k} = \tilde{b}_k$ für $k = 1, \ldots, K$ und $\tilde{z}_n = 0$ für $n \notin J(\tilde{\underline{j}})$, und setze $-\tilde{\gamma} = -\hat{\gamma} - \hat{c}_s\tilde{b}_r$.

S7) $\hat{A} = \tilde{A}$, $\hat{b} = \tilde{b}$, $\hat{c} = \tilde{c}$, $\hat{z} = \tilde{z}$, $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$, gehe zu S1)

5 Das Simplex-Verfahren

(5.4)

a) Für jedes x gilt: $\tilde{A}x = \tilde{b} \iff \hat{A}x = \hat{b} \iff Ax = b$.

b) $\hat{c}^\top x + \hat{\gamma} = \tilde{c}^\top x + \tilde{\gamma}$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $Ax = b$.

c) $(\tilde{z}, \tilde{\underline{j}})$ ist zulässige Basislösung zu $\tilde{A}x = \tilde{b}$, für die i), ii), iii) erfüllt sind.
Es ist $\tilde{a}_{rs} = 1$ und $\tilde{\gamma} = c^\top \tilde{z} = f(\tilde{z})$. Insbesondere ist (P) äquivalent zu

$$(\hat{P}) \qquad \text{Minimiere} \quad \hat{c}^\top x + \hat{\gamma} \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon \hat{A}x = \hat{b}\,,\ x \geq 0\}\,,$$

und dies äquivalent zu

$$(\tilde{P}) \qquad \text{Minimiere} \quad \tilde{c}^\top x + \tilde{\gamma} \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon \tilde{A}x = \tilde{b}\,,\ x \geq 0\}\,.$$

d) $f(\tilde{z}) = c^\top \tilde{z} = \tilde{\gamma} = \hat{c}_j \hat{b}_i / \hat{a}_{ij} + \hat{\gamma} \leq \hat{\gamma} = c^\top \hat{z} = f(\hat{z})$.

e) Ist $\hat{c} \geq 0$, so ist $c^\top x \geq c^\top \hat{z}$ für alle $x \in \mathcal{M}$, d.h. $\hat{z}$ ist optimal.

f) Ist $\hat{c}_s < 0$ und $\hat{a}_{*s} \leq 0$, so ist $\hat{c}^\top x$ auf $\mathcal{M}$ nicht beschränkt, d.h. $\inf(\mathrm{P}) = -\infty$.

5 Das Simplex-Verfahren

Karlsruhe Institute of Technology

Pivot-Regel von Bland

i) Pivot-Spalte ist die Spalte $s = \min\{n\colon \hat{c}_n < 0\}$.
   Sei $q_s = \min\{\hat{b}_k/\hat{a}_{ks}\colon \hat{a}_{ks} > 0\}$.

ii) Pivot-Zeile ist die Zeile r mit $j_r = \min\{j_k\colon \hat{a}_{ks} > 0 \text{ und } \hat{b}_k/\hat{a}_{ks} = q_s\}$.

(5.5) Das Simplex-Verfahren mit der Pivot-Regel von Bland wiederholt kein Tableau.

Phase I Sei $e = (1,1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^K$, und sei o.E. $b \geq 0$. Betrachte:

$$(\mathrm{P_I}) \qquad \text{Minimiere } e^\top(b - Ax) \quad \text{unter} \quad Ax \leq b\,,\; x \geq 0\,.$$

(5.6) $(\mathrm{P_I})$ ist zulässig, und (P) ist genau dann zulässig, wenn $\min(\mathrm{P_I}) = 0$.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
-\sum\limits_{k=1}^K a_{k1} & -\sum\limits_{k=1}^K a_{k2} & \cdots & -\sum\limits_{k=1}^K a_{kN} & 0 & \cdots & 0 & & -\sum\limits_{k=1}^K b_k \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_N & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & 1 & \cdots & 0 & & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KN} & 0 & \cdots & 1 & & b_K
\end{array}$$

5 Das revidierte Simplex-Verfahren

(5.7) Sei $\hat z$ Basislösung zum Pivot-Vektor $\underline{j}$, und sei $\underline{k} = (k_1, \dots, k_{N-K})$ ein Komplement von $\underline{j}$, d. h. $\{j_1, \dots, j_K\} \cup \{k_1, \dots, k_{N-K}\} = \{1, \dots, N\}$. Dann gilt:

a) $A(\underline{j}) \in \mathbb{R}^{K\times K}$ ist regulär, $\quad \hat z(\underline{j}) = A(\underline{j})^{-1} b, \quad \hat z(\underline{k}) = 0, \quad \hat A = A(\underline{j})^{-1} A$.

b) $\hat c(\underline{k}) \;=\; c(\underline{k}) - \big(A(\underline{j})^{-1} A(\underline{k})\big)^\top c(\underline{j})$.

Phase II

S0) Starte mit $\hat z(\hat{\underline{j}}) = A(\hat{\underline{j}})^{-1} b$, $\hat\gamma = c(\hat{\underline{j}})^\top A(\hat{\underline{j}})^{-1} b$. Speichere $A(\hat{\underline{j}})^{-1} \in \mathbb{R}^{K\times K}$.

S1) Setze $y := A(\hat{\underline{j}})^{-T} c(\hat{\underline{j}})$, $d = A(\hat{\underline{k}})^\top y$. Falls $d \le c(\hat{\underline{k}})$ STOP ($\hat z$ optimal)

S2) Bestimme Index $k_s \in \{k_1, \dots, k_{N-K}\}$ mit $d_s > c_{k_s}$.

S3) Berechne $w = A(\hat{\underline{j}})^{-1} a_{*k_s}$. Falls $w \le 0$ STOP ($\inf(\mathrm{P}) = -\infty$)

S4) Bestimme $r \in \{1, \dots, K\}$ mit $\hat z_{j_r}/w_r = \min\big\{\hat z_{j_l}/w_l : w_l > 0\big\}$.

S5) Setze $\tilde{\underline{j}} = (j_1, \dots, j_{r-1}, s, j_{r+1}, \dots, j_K)$, bestimme Komplement $\tilde{\underline{k}}$ von $\tilde{\underline{j}}$, setze

$$A(\tilde{\underline{j}})^{-1} = \left(I - \frac{(w - e^r)(e^r)^\top}{w_r}\right) A(\hat{\underline{j}})^{-1}\,,\; \tilde z(\tilde{\underline{j}}) = A(\tilde{\underline{j}})^{-1} b\,,\; \tilde\gamma = \hat\gamma \;+\; \frac{\hat z_{j_r}}{w_r}\,(c_{k_s} - d_s)$$

S6) Update $\hat{\underline{j}} = \tilde{\underline{j}}$ gehe zu S1).

6.1 Konvexe Optimierung – Konvexe Funktionen

(6.1) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ konvex.

a) Eine Funktion $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}$, $\lambda \in [0,1]$ gilt
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \;\le\; (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(y)\,.$$

b) f heißt *strikt konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}$, $x \neq y$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt:
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \;<\; (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(y)\,.$$

c) f heißt *gleichmäßig konvex*, wenn es $c_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathcal{D}$, $\lambda \in [0,1]$ gilt
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \;+\; c_0(1-\lambda)\lambda\,\|x-y\|^2 \;<\; (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(y)\,.$$

$g\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^P$ heißt konvex, wenn jede Komponente g_p für $p = 1, \dots, P$ konvex ist.

(6.2) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ offen und konvex, $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Dann ist äquivalent:

(1) f ist gleichmäßig konvex auf $\mathcal{D}$.

(2) Es existiert $c_0 > 0$ mit
$$f(x) - f(y) \;\ge\; \mathrm{D}f(y)(x-y) + c_0\,\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}\,.$$

(3) Es existiert $c_0 > 0$ mit
$$\big(\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\big)(x-y) \;\ge\; 2c_0\,\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}\,.$$

(4) Es existiert $c_0 > 0$ mit
$$z^\top\, \mathrm{D}^2 f(x)\, z \;\ge\; 2c_0\,\|z\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\; z \in \mathbb{R}^N\,.$$

(6.3) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ offen und konvex, und sei $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig.

6.2 Konvexe Optimierung – Existenz und Eindeutigkeit

Seien $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $f\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^P$ konvex, $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$. Betrachte

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} \ = \ \big\{x \in \mathcal{K},\ g(x) \le 0,\ Ax = b\big\}\,.$$

(6.4) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $f\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex und x^* ein lokales Minimum von f auf $\mathcal{M}$, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(x^*) \le f(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}$ mit $\|x - x^*\| \le \varepsilon$.
Dann ist x^* sogar globales Minimum, d.h. $f(x^*) \le f(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}$.

(6.5) Es sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\inf(\text{P}) > -\infty$ und

$$\Lambda \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} f(x) + r \\ g(x) + z \\ Ax - b \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^K \colon r \ge 0,\ z \ge 0,\ x \in \mathcal{K} \right\}$$

sei abgeschlossen. Dann besitzt (P) eine Lösung.

(6.6) Ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$ und f strikt konvex, so besitzt (P) höchstens eine Lösung.

(6.7) Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{M}$ abgeschlossen, und sei f gleichmäßig konvex.
Dann ist (P) eindeutig lösbar.

6.3 Konvexe Optimierung – Das duale Problem

Seien $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $f\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^P$ konvex, $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$.

(P) Minimiere $f(x)$ auf $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{K}\colon g(x) \leq 0,\ Ax = b\}$.

Definiere $$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} f(x)+r \\ g(x)+z \\ Ax-b \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^K \colon r \geq 0,\ z \geq 0,\ x \in \mathcal{K} \right\}.$$

($\tilde{\mathrm{P}}$) Minimiere $\phi(\beta, u, v) = \beta$ unter $(\beta, u, v) \in \Lambda \cap \big(\mathbb{R} \times \{0_P\} \times \{0_K\}\big)$.

Definiere den Halbraum $H(\gamma, u, v) = \{(t, w, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^K : t + u^\top w + v^\top z \geq \gamma\}$.

($\tilde{\mathrm{D}}$) Maximiere $\psi(\gamma, u, v) = \gamma$ unter $\Lambda \subset H(\gamma, u, v)$.

Setze $$f^*(u, v) = \inf_{x\in\mathcal{K}} \Big(f(x) + u^\top g(x) + v^\top (Ax - b)\Big).$$

(D) Maximiere $f^*(u, v)$ auf $\mathcal{M}^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^K \colon u \geq 0,\ f^*(u, v) > -\infty\}$.

6.4 Konvexe Optimierung – Dualitätssätze

(6.12) Für alle $x \in \mathcal{M}$ und $(u, v) \in \mathcal{M}^*$ gilt $f(x) \geq f^*(u, v)$.
Ist $f(x^*) = f^*(u^*, v^*)$ für $x^* \in \mathcal{M}$, $(u^*, v^*) \in \mathcal{M}^*$, so sind x^* und (u^*, v^*) optimal.

(6.13) Es sei $\mathcal{K} = \mathbb{R}^N$ und es gelte die *Slaterbedingung* (SB):

(SB1) Rang $A = K \leq N$,

(SB2) es existiert $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$ mit $A\hat{x} = b$ und $g_p(\hat{x}) < 0$ für $p = 1, \ldots, P$.

Das Problem (P) sei lösbar durch $x^* \in \mathcal{M}$. Dann gibt es auch eine Lösung $(u^*, v^*) \in \mathcal{M}^*$ von (D) mit $f(x^*) = f^*(u^*, v^*)$ und $u_p^* \, g_p(x^*) = 0$ für $p = 1, \ldots, P$.

(6.14) Wir definieren die *Lagrangefunktion* $L(x, u, v) = f(x) + u^\top g(x) + v^\top (Ax - b)$.

a) Sei $x^* \in M$ optimal für (P) und die Slaterbedingung (SB) sei erfüllt.
Dann existieren $u^* \in \mathbb{R}^P_{\geq 0}$, $v^* \in \mathbb{R}^N$ mit $u^{*\top} g(x^*) = 0$ und

$$L(x^*, u, v) \leq L(x^*, u^*, v^*) \leq L(x, u^*, v^*) \qquad \text{für alle } (x, u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P_{\geq 0} \times \mathbb{R}^K .$$

b) Falls $(x^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P_{\geq 0} \times \mathbb{R}^K$ ein Sattelpunkt von L ist,
so ist x^* Lösung von (P) und (u^*, v^*) Lösung von (D).

(6.15) Es seien $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ konvex und differenzierbar, und die Slaterbedingung (SB) sei erfüllt. Dann gilt:
$x^* \in \mathcal{M}$ ist genau dann eine Lösung von (P), wenn es $u^* \in \mathbb{R}^P_{\geq 0}$ und $v^* \in \mathbb{R}^K$ gibt mit

$$\mathrm{D}f(x^*) + u^{*T} \mathrm{D}g(x^*) + v^{*T} A = 0\,, \quad Ax^* = b\,, \quad g(x^*) \leq 0\,, \quad u_k^* g_k(x^*) = 0\,, \; k = 1, \ldots, p\,.$$

7 Differenzierbare Optimierung

(7.2) Sei $h\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$ stetig differenzierbar und $h(\hat{x}) = 0$.
Die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}h(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{K\times N}$ habe den Rang K (also insbesondere $K \le N$).
Sei ferner $z \in \mathbb{R}^N$ mit $\mathrm{D}h(\hat{x})z = 0$.
Dann existiert $\delta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$r\colon (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

mit $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$ und $h\big(\hat{x} + tz + r(t)\big) = 0$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$.

(7.4) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^P$, $h\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ stetig differenzierbar.
Sei x^* ein (lokales) Minimum von f auf der Menge

$$\mathcal{M} \;=\; \big\{x \in \mathcal{D}\colon\, g(x) \le 0\,,\; h(x) = 0\big\}\,.$$

Es gelte die *constraint qualification*

$$\text{(CQ1)}\qquad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \operatorname{Rang} \mathrm{D}h(x^*) = K\,, \\ \text{(ii)} & \text{es gibt } \hat{z} \in \mathbb{R}^N \text{ mit } g(x^*) + \mathrm{D}g(x^*)\hat{z} < 0 \text{ und } \mathrm{D}h(x^*)\hat{z} = 0\,. \end{array}$$

Dann existiert $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^P \times \in \mathbb{R}^K$, so dass (x^*, u^*, v^*) ein KKT-Punkt ist, d. h.

a) $\quad \nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = \nabla f(x^*) \;+ \mathrm{D}g(x^*)^\top u^* \;+\; \mathrm{D}h(x^*)^\top v^* \;=\; 0\,,$

b) $\quad g(x^*) \le 0, \quad u^* \ge 0, \quad g(x^*)^\top u^* = 0\,,$

c) $\quad h(x^*) = 0\,.$

7 Differenzierbare Optimierung

(7.6) Sei $x^* \in \mathcal{M}$ optimal, und sei $\mathcal{I}(x^*) = \big\{p \in \{1,\dots,P\} \colon g_p(x^*) = 0\big\}$ die Menge der aktiven Indizes mit $q = |\mathcal{I}|$. Dann folgt (CQ1) aus

$$\text{(CQ2)} \qquad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} \mathrm{D}g_{\mathcal{I}}(x^*) \\ \mathrm{D}h(x^*) \end{pmatrix} = q + K\,.$$

(7.7) Optimalitätsbedingung 2. Ordnung
Sei x^* lokales Minimum von f auf $\mathcal{M}$, und sei (CQ2) erfüllt.
Es seien zusätzlich f, g und h zweimal stetig differenzierbar in x^*.
Dann existiert $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^P \times \in \mathbb{R}^K$, so dass (x^*, u^*, v^*) ein KKT-Punkt ist, und auf dem Unterraum $V = \big\{z \in \mathbb{R}^N \colon \mathrm{D}h(x^*)z = 0\,,\ \mathrm{D}g_p(x^*)z = 0 \text{ für alle } p \in \mathcal{I}(x^*)\big\}$ gilt

$$z^\top \mathrm{D}_x^2 L(x^*, u^*, v^*)\, z \ \geq\ 0 \quad \text{für alle } z \in V\,.$$

(7.8) Hinreichende Optimalitätsbedingung 2. Ordnung
(x^*, u^*, v^*) sei ein KKT-Punkt, und zu $\mathcal{I}^+ = \big\{p \in \mathcal{I}(x^*) \colon u_p^* > 0\big\}$ definiere den Kegel $\mathcal{C} = \big\{z \in \mathbb{R}^N \colon \mathrm{D}h(x^*)z = 0\,,\ \mathrm{D}g_p(x^*)z = 0 \text{ für } p \in \mathcal{I}^+\,,\ \mathrm{D}g_p(x^*)z \leq 0 \text{ für } p \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^+\big\}$.
Zusätzlich gelte

$$z^\top \mathrm{D}_x^2 L(x^*, u^*, v^*) z \ >\ 0 \quad \text{für alle } z \in \mathcal{C}\,,\ z \neq 0\,.$$

Dann ist x^* striktes lokales Minimum von f auf $\mathcal{M}$.

8.1 Quadratische Optimierung – Existenz und Dualität

Seien $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $c \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^K$. Betrachte

$$\text{(P)} \quad \text{Minimiere } f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \geq 0, \ Ax = b\}.$$

(8.1) Sei (P) zulässig und $\inf(\text{P}) > -\infty$. Dann ist (P) lösbar.

(8.2) Betrachte das lineare Optimierungsproblem (mit $Q = 0$). Dann existiert $y^* \in \mathbb{R}^K$ mit

i) $c + A^\top y^* \geq 0$, ii) $(c + A^\top y^*)^\top x^* = 0$.

(8.3) a) Sei $x^* \in \mathcal{M}$ Lösung von (P). Dann existiert $y^* \in \mathbb{R}^K$ mit

i) $Qx^* + c + A^\top y^* \geq 0$ ii) $(Qx^* + c + A^\top y^*)^\top x^* = 0$.

b) Sei Q symmetrisch und positiv semidefinit, $x^* \in \mathcal{M}$, und es gebe $y^* \in \mathbb{R}^K$ mit i), ii). Dann ist x^* Lösung von (P).

(8.4) Betrachte

$$(\text{P}_2) \quad \text{Minimiere } f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b\}.$$

a) Sei $x^* \in \mathcal{M}$ Lösung von (P_2). Dann existiert $u^* \in \mathbb{R}^K$ mit $u^* \geq 0$ und

i) $Qx^* + c + A^\top u^* = 0$ ii) $(b - Ax^*)^\top u^* = 0$.

b) Sei Q symmetrisch und positiv semidefinit, $x^* \in \mathcal{M}$, und es gebe $u^* \in \mathbb{R}^K$ mit $u^* \geq 0$. i) und ii) sei erfüllt. Dann ist x^* Lösung von (P_2).

8.2 Der Algorithmus von Goldfarb-Idnani

Seien $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sym. pos. def., $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $c \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^K$, $\mathcal{I} \subset \{1, ..., K\}$. Betrachte

$$(\mathrm{P}_\mathcal{I}) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) := \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^N\colon\ (Ax)_k \le b_k,\ k \in \mathcal{I}\right\}.$$

Voraussetzung **(V)**: $x^m \in \mathcal{M}_{\mathcal{I}^m}$ sei optimal für $(P_{\mathcal{I}^m})$ mit zugehörigem Multiplikator $u^m \geq 0$, für $a := a^p$ und $\beta := b_p$ gelte $a^Tx^m > \beta$, und $\{a^k\colon k \in \mathcal{I}^m\}$ seien linear unabhängig.

(A0) Setze $\theta := 0$, $f := f(x^m)$, $x := x^m$, $\mathcal{I} := \mathcal{I}^m$, $u := u^m \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}^m|}$.

(A1) $A_\mathcal{I}^T := \left(a^{k_1}, ..., a^{k_q}\right)$ für $\mathcal{I} = \{k_1, \dots, k_q\}$.

(A2) Berechne $d := (A_\mathcal{I}Q^{-1}A_\mathcal{I}^T)^{-1}A_\mathcal{I}Q^{-1}a$ (falls $\mathcal{I} \neq \emptyset$, sonst $d := 0$), $z := Q^{-1}(a - A_\mathcal{I}^Td)$ und (falls $z \neq 0$) setze $t_1 := (a^Tx - \beta)/(a^Tz)$.

(A3) Falls $u - t_1d \geq 0$ oder $\mathcal{I} = \emptyset$, so setze

$$\begin{array}{rclrcl} x^{m+1} & := & x - t_1z\,, & u^{m+1} & := & \begin{bmatrix} u - t_1d \\ \theta + t_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|+1}, \\ \mathcal{I}^{m+1} & := & \mathcal{I} \cup \{p\}\,, & f^{m+1} & := & f + t_1(\theta + t_1/2)\,a^Tz\,. \end{array}$$

(A4) Falls $u - t_1d \not\geq 0$ und $\mathcal{I} \neq \emptyset$, setze $t_2 := \min\{u_k/d_k : d_k > 0\,,\ k \in \mathcal{I}\} = u_\ell/d_\ell$ mit $\ell \in \mathcal{I}$ und

$$\begin{array}{rclrcl} x & := & x - t_2z\,, & \mathcal{I} & := & \mathcal{I} \setminus \{\ell\}\,, \\ u_k & := & u_k - t_2d_k \text{ für } k \in \mathcal{I}\,, & f & := & f + t_2(\theta + t_2/2)\,a^Tz\,, \\ \theta & := & \theta + t_2\,. & & & \end{array}$$