**Funktionentheorie**

**Übungsblatt 10**

**Aufgabe 1 (C) (10 Punkte)**

(a) Sei \( f \neq \text{konst} \), holomorph mit \( |f(z)| \leq 1 \) für \( |z| < 1 \). Zeigen Sie: Dann hat man die Abschätzung
\[
\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}
\]
für alle \( |z| < 1 \).

Hinweise:

(1) Betrachten Sie die Funktion \( g(z) = \frac{f(z) - a}{1 - af(z)} \) mit \( a = f(0) \).

(2) Sie dürfen ohne Begründung verwenden
\[
\frac{|b - d|}{1 - |b||d|} \leq \frac{|b + d|}{1 + |b||d|} \quad \text{für } |b| < 1, |d| < 1.
\]

(b) Sei \( D := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \} \). Gibt es eine holomorphe Funktion \( f : D \to D \), für die \( f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \) und \( f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \) gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2** Sei \( f \) eine ganze Funktion mit
\[
|f(z)| \leq \frac{1}{|\text{Im} z|}
\]
für alle \( z \in \mathbb{C} \).

Zeigen Sie, dass \( f \equiv 0 \).

**Aufgabe 3** (Schwarzesches Spiegelungsprinzip) Sei \( G \neq \emptyset \) ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, d.h. \( z \in G \Leftrightarrow \overline{z} \in G \).

Wir setzen \( G_+ := \{ z \in G : \text{Im} z > 0 \} \), \( G_- := \{ z \in G : \text{Im} z < 0 \} \) und \( G_0 := \{ z \in G : \text{Im} z = 0 \} \). Weiter sei \( f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C} \) stetig, \( f|_{G_+} \) holomorph und \( f(G_0) \subset \mathbb{R} \).

Beweisen Sie, dass dann die durch \( \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } z \in G_- \end{cases} \) definierte Fortsetzung von \( f \) auf \( G \) holomorph ist.

**Aufgabe 4 (C) (10 Punkte)** Berechnen Sie jeweils das Wegintegral \( \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \) für den skizzierten Rundweg \( \gamma \).