Aufgabe A7

Hinweis: \( \sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x - \sin^3 x = 3 \sin x (\lambda - \sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \)

\[ \Rightarrow 4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin(3x) \]

Auszug: \( u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(y) \sin(nx) \)

\[ A u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n(y) \cdot n^2 (-\sin(nx)) + b_n(y) \sin(nx) \right] \]

\[ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ b_n''(y) - n^2 \cdot b_n(y) \right] \sin(nx) \]

\[ = \frac{3}{4} \sin^3 x = \frac{3}{4} y \sin x - \frac{1}{4} y \sin(3x) \]

\[ \Rightarrow \text{Koeffizientengleichung:} \quad b_n''(y) - b_n(y) = \frac{3}{4} y \]

\[ b_3''(y) - 3b_3(y) = -\frac{1}{4} y \]

\[ b_n''(y) - n^2 b_n(y) = 0 \quad \text{f. } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1,3\} \]

Randbedingungen:

\[ u(0,y) = 0 \quad \checkmark \]

\[ u(1,y) = 0 \quad \checkmark \]

\[ u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(0) \sin(nx) = 0 \quad \forall x, n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1,3\} \]

\[ u(x,1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(1) \sin(nx) = 0 \]

\[ \Rightarrow b_n(0) = b_n(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \]

\[ \Rightarrow b_n(y) = 0 \quad \text{f. } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1,3\} \]

Löse also:

\[ (\lambda) \]

\[ \begin{cases} b''_n(y) - b_n(y) = \frac{3}{4} y \\ b_n(0) = b_n(1) = 0 \end{cases} \]

\[ (2) \]

\[ \begin{cases} b''_3(y) - 3b_3(y) = -\frac{1}{4} y \\ b_3(0) = b_3(1) = 0 \end{cases} \]

Lsg. d. homog. Probleme:

\[ b''_n(y) = a e^{ny} + b e^{-ny} \]

\[ b_n(0) = a + b = 0 \]

\[ b_n(1) = a e^{-n} - a e^{-n} \sinh(n) = 0 \]

Lsg. d. inhomog. Probleme:

\[ b'_n(y) = -\frac{3}{4} y + a e^{y} + b e^{-y} \]

\[ a = -b \]

\[ b_n(1) = -\frac{3}{4} + a e^{-y} = -\frac{3}{4} + 2 a \sinh(y) = 0 \]

\[ \Rightarrow a = -\frac{3}{8} \frac{1}{\sinh(y)} \]
(2) Lsg. d. homog. Problems: \[ b_2(y) = a e^{3y} + b e^{-3y} \]
  Lsg. d. inhom. Problems: \[ b_2(y) = \frac{1}{36} \]
  allg. Lsg.: \[ b_2(y) = \frac{1}{36} y + a e^{3y} + b e^{-3y} \]

RB: \[ b_2(0) = a + b = 0 \Rightarrow b = -a \]
  \[ b_2(0) = \frac{1}{36} y = \frac{1}{36} + a e^{3y} + b e^{-3y} = \frac{1}{36} + 2a \sinh(3) = 0 \]
  \[ \Rightarrow a = -\frac{1}{72} \frac{1}{\sinh(3)} \]

Lösungsansatz: \[ u(x, y) = \left[ -\frac{3}{3} y + \frac{3}{8 \sinh(\lambda)} (e^y - e^{-y}) \right] \sin(x) \]
  \[ + \left[ \frac{1}{36} y - \frac{1}{72 \sinh(3)} (e^{3y} - e^{-3y}) \right] \sin(3x) \]
  \[ = \left[ -\frac{3}{4} y + \frac{3 \sinh(y)}{4 \sinh(\lambda)} \right] \sin(x) + \left[ \frac{1}{36} y - \frac{\sinh(3y)}{36 \sinh(3)} \right] \sin(3x) \]

Aufgabe 18

Berücksichtigen Sie zunächst den Fall, dass \( \lambda = 0 \in \mathbb{R} \) und der Kegel \( K \)
  mit \( K \subset \mathbb{R}^2 \), \( K \cap \mathbb{R}^2 = \{ x_0 \} \)

Nach Aufgabe 3, ist \( W\left(r, \phi \right) = r^{-\frac{1}{\pi - \kappa}} \sin \left( \frac{\pi}{2 \pi - \kappa} \phi \right) \)
  in \( K^c \) harmonisch und positiv.

\( h = w > 0 \) in \( \mathbb{R}^2 \) und \( h(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = x_0 \)
  in \( K^c \)
  ist \( h \) harmonisch, ist \( h \) in \( \mathbb{R}^2 \) und \( h \) in \( K^c \)
  auf \( \mathbb{R}^2 \)

\( h \) ist Barriere bei \( x_0 \) und \( x_0 \) regulärer Randpunkt.
Sei nun $x_0 \neq 0$ und $K$ Kegel mit $K \subseteq \mathbb{R}^2$, $x_0 \cap \overline{K} = \{x_0\}$.

$K$ lässt sich durch affin-euclid. Beziehung $T$ (Drehung, Translation) in $K$ überführen: $T(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) + b$ ($A$ Drehmatrix, $b$ Vektor)

\[
\begin{pmatrix}
\cos \beta & -\sin \beta \\
\sin \beta & \cos \beta
\end{pmatrix}
\]

Betrachte die Funktion $\tilde{w}(x_1, x_2) = w(T(x_1, x_2))$

Dann gilt (nachrechnen!): $\Delta \tilde{w}(x_1, x_2) = \Delta w(T(x_1, x_2))$

\[
= (\Delta w)(T(x_1, x_2)) = 0
\]

und da für $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^c$ gilt: $T(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^c$ gilt $\tilde{w} > 0$ in $\mathbb{R}^2$.$\tilde{w}(x_0) = 0$

⇒ $\tilde{w}$ Barriere bei $x_0$ ⇒ $x_0$ regulärer Randpunkt

aufgabe 13

1. $u_k(x)$ monotone wachsend
   a) $S_0$ ein Gebiet mit $\overline{S_0} \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_0$.
   Für $p \neq 1$ ist $u_{k+1} - u_k$ nicht-negativ u. harmonisch. Nach der Harnack-Ungl. gilt:
   \[
   0 \leq u_{k+1}(x) - u_k(x) \leq C \min_{\overline{S_0}} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leq C (u_{k+1}(a) - u_k(a)) \leq \varepsilon \text{ f. } p \neq p_0
   \]

   ⇒ $(u_k)$ konvergiert auf $\overline{S_0}$ gleichmäßig gegen eine harmon. Funktion (AT harmonisch folgt z.B. aus Konv. Satz u. Weierstraß)

   b) $\bar{a} = \lim u_k$ in $\overline{S_0}$ gelegenes Kugel $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n_0$.
   Falls $a \in \overline{B}$, verwendet a)
Tolle auf, um den Mittelpunkt von \( S \) mit \( x_0 \) durch Weg \( f \).

Sei \( g > 0 \) mit dist \((y_1, \partial S) \geq 2g\)

\[
T_g := \{ B_g(y(t)), \ t \in [0,1] \}
\]

\( g \)-Umgebung von \( y \)

Setze \( S_0 := B_0T_g \) so dass \( \overline{S_0} \subset S \). Kita \((u_k)\) konv. glm. in \( S_0 \), also insbes. in \( \overline{S} \).

**Aufgabe 20**

\( s. \text{Vorb.} \)

1. \( u_0 \) subharmonisch, gilt \( u_0 = P_{B_0}u_0 \geq u_0 \) und \( u_0 \)

ist subharmonisch in \( S \), \( u_0 \) harmonisch in \( B_0 \), stetig auf \( \overline{B}_0 \).

Analog: \( u_j \) subharmonisch in \( S \), \( u_j \) harmonisch in \( B_{j-1} \), stetig auf \( \overline{B}_{j-1} \).

\( \Rightarrow \) \( u_j \) monoton wachsend und alle \( u_j \) sind subh.

\( \Rightarrow \) \( u_j \) nach oben beschränkt

\( \Rightarrow \) \( (u_j) \) konv. punktweise gegen eine Flh. \( u_0 \).

Nach Konv. \( 1. \) für alle \( x \in \overline{S} \) und \( j \) mit \( j \geq k \), und somit eine Teilfolge \( (u^{(k)}_j) \) von \( u_j \) mit

1. \( u^{(k)}_j \in C^2(B_k) \cap C(\overline{B}_k) \)
2. \( u^{(k)}_j \) harmonisch in \( B_k \)
3. \( \lim_{j \to \infty} u^{(k)}_j(x) = u_0(x) \) f. alle \( x \in B_k \)

Nach dem Harnacksschen Konvergenzsatz gilt: \( u_0 \) harmonisch in \( B_k \).

Außerdem, da \( P_{B_j}u_{j-1} \mid_{\partial S} = u_0 \mid_{\partial S} \), folgt \( u_0 \mid_{\partial S} = u_0 \) konv.

Da \( k \) beliebig \( u \) \( S = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \) : \( u_0 \) harmonisch in \( S \).

\( \therefore \) Stetigkeit von \( u_0 \) auf \( \overline{S} \) noch nicht klar!
Sei \( \bar{u} \) die Parau-Lsg. des gege. Problems. Da \( u_k \) Subharmon.
folgt mit dem Maximumprinzip

\[
u_0(x) \leq u_k(x) \leq \bar{u}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{h} \in \mathbb{N}
\]

\[
\Rightarrow u_0(x) \leq u_\infty(x) \leq \bar{u}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}
\]

Sei \( (x_n) \subset \mathbb{R} \), \( x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \). Da \( u_0 \) und \( \bar{u} \) stehig, folgt

\[
u_0(x_0) = \lim_{n \to \infty} u_0(x_n) \leq \liminf_{n \to \infty} u_\infty(x_n)
\]
\[
\leq \limsup_{n \to \infty} u_\infty(x_n) \leq \lim_{n \to \infty} \bar{u}(x_n) = \bar{u}(x_0) = u_0(x_0)
\]

\[
\Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_\infty(x_n) = u_0(x_0) = u_\infty(x_0) \quad \text{d.h.} \ u_\infty \in C(\bar{\Omega})
\]