Dr. habil. G. Fels
KIT SS 2011

Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

2. Übungsblatt

Aufgabe 3.
Es sei $\mathfrak{S}_n$ die Permutationsgruppe der Menge $\{1, , , , n\}$. Welche der folgenden Abbildungen definieren eine Gruppenoperation von $\mathfrak{S}_n$ auf $\mathbb{R}^n$ (im Sinne von 1.1.2 in der Vorlesungszusammenfassung)?

(a) $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\sigma, (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$

(b) $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\sigma, (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$

Aufgabe 4.
Der Einfachkeit halber schreiben wir hier $V := \mathbb{R}^3$.

(a) Es sei $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die zugeordnete Norm. Dann gilt
$$2\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in V\ .$$

(b) Umgekehrt, sei $\|\ \| : V \times V \to [0, \infty)$ eine Norm, z.B., $\|(x, y, z)^T\| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$. Definiert dann die Abbildung
$$b(x, y) := \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$$
ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 5.
Es sei $\mathbb{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum und $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}$. Die Punkte $P_0, \dots, P_k$ sind genau dann in allgemeiner Lage (im Sinne von 1.1.8) falls auch $P_{\ell(0)}, P_{\ell(1)}, \dots, P_{\ell(k)}$ in allgemeiner Lage sind, wobei $\ell : \{0, 1, .., k\} \to \{0, 1, .., k\}$ eine beliebige Bijektion (Permutation) ist. D.h., die Eigenschaft der Punkte $P_0, \dots, P_k$ in allgemeiner Lage zu sein hängt nur von der Beschaffenheit der Menge $\{P_0, \dots, P_k\}$ und nicht von der gewählten Reihenfolge dieser Punkte ab.

Aufgabe 6.
Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und v_1, v_2, v_3 eine orthonormale Basis.

(a) Bestimmen Sie die folgenden orthogonalen Projektionen: (a) π_1 auf die Ebene $E = \mathbb{R}(v_1 + v_2) \oplus \mathbb{R}(v_2 + v_3)$ und (b) π_2 auf die Gerade $F = \mathbb{R}(v_1 + 2v_2 + 3v_3)$ (z.B. in dem Sie die beschreibenden Matrizen bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 angeben).

(b) Ist die Verkettung von zwei orthogonalen Projektionen wieder eine orthogonale Projektion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 28.04.2011.