Fakultät für Mathematik
Abteilung für Didaktik
Karlsruher Institut für Technologie

Dr. habil. G. Fels
KIT SS 2011

# Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

## 3. Übungsblatt

**Aufgabe 7.**
Es sei $V := P(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller $2\pi$-periodischen und linksseitig stetigen Funktionen, d.h. $P(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$

(a) Zeigen sie, dass die Abbildung

$$h(f,g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf $P(\mathbb{R})$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$, $m, n \in \mathbb{N}$ paarweise orthogonal sind.

(c) Es sei $W_N$ der von 1 sowie $\sin(kx), \cos(kx)$ mit $k \leq N$ erzeugte Untervektorraum von $V$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\pi_N : V \to W_N$ in dem Sie $\pi_N(f)$ für eine beliebige Funktion $f \in V$ angeben.

(d) Berechnen sie $\pi_4(\varphi)$ wobei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi$-periodische Fortsetzung von $s : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $s(x) = x - \pi$ ist. (D.h., für $y = x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $x \in [0, 2\pi)$ definiert man $\varphi(y) := s(x)$.)

**Aufgabe 8.**
Es sei $\mathrm{O}(3)$ die Gruppe aller orthogonalen Transformationen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathrm{O}(3) : \det A = 1\}$. Wir betrachten $\mathrm{O}(3)$ als eine Teilmenge des Vektorraumes $\mathbb{R}^9$ vermöge der Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Transformation $T \in \mathrm{SO}(3)$ mindestens eine Gerade (1-dimensionalen Untervektorraum) $\ell \subset \mathbb{R}^3$ punktweise festläßt.

(b) Gibt es für je zwei Elemente $S, T \in \mathrm{SO}(3)$ eine stetige Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^9$, so dass für jedes $t \in [0,1]$ $\gamma(t) \in \mathrm{SO}(3)$ und $\gamma(0) = S, \gamma(1) = T$ gilt?

(c) Gibt es eine <u>stetige</u> Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$, die die Transformationen

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verbindet? (d.h., $\gamma(0) = S, \gamma(1) = T$.) Im Falle der Existenz geben Sie in (b) und (c) eine solche Kurve explizit an.

*Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 3.05.2011.*