Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

4. Übungsblatt

Aufgabe 9.
In einer Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ verwenden wir die Zyklenschreibweise für ihre Elemente. So z.B. bezeichnet das Element $\sigma = (124)(56) \in \mathfrak{S}_7$ die Permutation $\sigma : \{1, \dots, 7\} \to \{1, \dots, 7\}$ mit

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 4,\ \sigma(3) = 3,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 6,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 7\ .$$

Es sei jetzt $G = \mathfrak{S}_3$ und $H := \langle(123)\rangle$ die kleinste Untergruppe, die das Element (123) enthält. Zeigen Sie:

(a) $|H| = 3$

(b) $H < \mathfrak{S}_3$ ist ein Normalteiler.

(c) $J := \langle(12)\rangle$ ist kein Normalteiler in $\mathfrak{S}_3$

(d) Finden sie einen Gruppenhomomorphismus $\psi : J \to \mathrm{Aut}(H)$, so dass das korrespondierende semidirekte Produkt $H \rtimes_\psi J$ isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ ist und geben Sie explizit einen solchen Isomorphismus an.

Aufgabe 10.
Betrachten Sie die folgende Menge von reellen Matrizen:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}_{>0},\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Geben Sie jeweils einen Normalteiler $N \lhd G$ und eine Untergruppe $H < G$, die kein Normalteiler ist, an.

(b) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und definieren Sie auf dem Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine semidirekte Gruppenstruktur (für ein geeignetes $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$), so dass $\mathbb{R} \rtimes_\psi \mathbb{R}$ isomorph zu G ist. Geben Sie explizit einen Isomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{R} \rtimes_\psi \mathbb{R}$$

an.

Aufgabe 11.
Es sei $\mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt ausgestattet.

(a) Es sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Gleitspiegelung entlang einer affinen Gerade $\ell \subset \mathbb{R}^2$. Man beweise, dass der Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ genau dann auf ℓ liegt, wenn die Punkte $v, R(v)$ und $R^2(v)$ auf einer affinen Gerade liegen.

(b) Es sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orierntierungsumkehrende Bewegung. Falls es einen Punkt $w \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $w, R(w)$ und $R^2(w)$ paarweise verschieden und auf einer Gerade liegen, so ist R eine Gleitspiegelung.

Aufgabe 12.
Es sei $(\mathbb{R}, +)$ die additive Gruppe der reellen Zahlen.

(a) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ welcher nicht $\mathbb{R}$-linear ist.

(b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es gibt einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ welcher nicht $\mathbb{R}$-linear ist.

(c) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ welcher nicht $\mathbb{Q}$-linear ist.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 10.05.2011.