Zu Aufgabe 7a. Die $\mathbb{R}$-Bilinearität von h folgt aus der Linearität des Integrals:

$$\int (a_1 f_1 + a_2 f_2) g \, dx = a \int f_1 g \, dx \; + \; a_2 \int f_2 g \, dx$$

Die Symmetrie $h(f,g) = h(g,f)$ und die positive Semidefinitheit $\int f^2(x)\, dx \geq 0$ ist ebenfalls trivial. Die einzige Aussage, die nicht offensichtlich ist, ist der Nachweis der Nichtentartung, d.h., $\int f^2(x)\, dx > 0 \iff f \neq 0$:

$$\int f^2(x)\, dx > 0 \Longrightarrow \exists\, y \in \mathbb{R},\ f^2(y) > 0 \Longrightarrow f(y) \neq 0 \Longrightarrow f \neq 0.$$

$$f \neq 0 \Longrightarrow \exists\, y \in \mathbb{R},\ f^2(y) = \delta > 0 \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } f^2(z) > \delta/2\ \forall z \in [y, y+\varepsilon) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int f^2(x)\, dx \geq \frac{\delta\varepsilon}{2} > 0 \qquad .$$

Zu Aufgabe 7b.

$$\begin{aligned}
a_{nm} := \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin' mx \, dx = \\
&= \frac{1}{m} \sin nx \sin mx \Big|_0^{2\pi} - \frac{n}{m} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \\
&= -\frac{n}{m} \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \qquad\qquad (*) \\
&= \frac{n}{m^2} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos' mx \, dx = \\
&= \frac{n}{m^2} \cos nx \cos mx \Big|_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2} \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \\
&= \frac{n^2}{m^2} \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx
\end{aligned}$$

Falls $n = m$ folgt bereits aus $(*)$ dass $a_{nn} = -a_{nn}$, d.h., $a_{nn} = 0$. Falls $n \neq m$, so gilt $a_{nm} = \frac{n^2}{m^2} a_{nm}$ und damit ebenfalls $a_{nm} = 0$.
Analog beweist man $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx$ für $m \neq n$.

Zu Aufgabe 17c. Dagegen gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos' nx \sin nx = \\
&= -\frac{1}{n} \cos nx \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 nx) \, dx
\end{aligned}$$

also $2\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = 2\pi = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx$. Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine (unendliche) orthonormale Familie von Vektoren aus $P(\mathbb{R})$.
Nach der Projektionsformel aus der Vorlesung gilt dann

$$\pi_N(f) = \langle f, 1\rangle \cdot \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{N} \langle f, \sin nx\rangle \cdot \frac{\sin nx}{\pi} + \langle f, \cos nx\rangle \cdot \frac{\cos nx}{\pi}$$

Zu Aufgabe 17d.

$$\pi_4(\varphi)\,(x) = 0 - 2\frac{\sin 1x}{1} - 2\frac{\sin 2x}{2} - 2\frac{\sin 3x}{3} - 2\frac{\sin 4x}{4}$$

Zu Aufgabe 18a. Um zu zeigen, dass jedes $A \in \mathrm{SO}(3)$ einen Eigenwert 1 hat, beweisen wir, dass $\det(A - E_3) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\det(A - E_3) &= \det(A - E_3) \cdot 1 = \det(A - E_3) \det A^T = \det((A - E_3) \cdot A^T) = \\ &= \det(E_3 - A^T) = \det(E_3 - A) = (-1)^3 \det(A - E_3) = -\det(A - E_3)\end{aligned}$$

Da die einzige Zahl mit $c = -c$ die Null ist, folgt $\det(A - E_3) = 0$. Die Gerade ℓ die durch einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert 1 aufgespannt wird, wird punktweise durch A fixiert. Da aus $A(\ell) = \ell$ auch $A(\ell^\perp) = \ell^\perp$, läßt A die zu $\ell = \mathbb{R}v_1$ orthogonale Ebene invariant. Damit haben wir gezeigt: Jedes Element $A \in \mathrm{SO}(3)$ hat ein Fixgerade, die die Drehachse der Drehung (um einen Winkel θ) in der Ebene $\ell^\perp$ ist.

Zu Aufgabe 18b. Wir bezeichnen jetzt mit $D(v, \theta)$ die Drehung in $\mathrm{SO}(3)$ mit Drehachse $\mathbb{R}v$ und der Drehebene $v^\perp = \langle w_1, w_2\rangle$ um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn (so dass w_1, w_2, v positiv orientiert ist). Für $S, T \in \mathrm{SO}(3)$ seien $\mathbb{R}v_S, \mathbb{R}v_T$ die Drehachsen wie in (a) und θ_S, θ_T die ensprechenden Drehwinkel, d.h., $S = D(v_S, \theta_S)$ und $T = D(v_T, \theta_T)$. Dann definieren wir eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathrm{SO}(3)$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} D(v_1, (1 - 2t)\theta_S) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ D(v_2, (2t - 1)\theta_T) & \text{für } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Zu Aufgabe 18c. Es gibt keine <u>stetige</u> Abbildung $\gamma : I \to \mathrm{O}(3)$ mit $\gamma(0) = T$ und $\gamma(1) = S$: Da andernfalls wegen $\det(S) = 1$ und $\det(T) = -1$ müsste $\det \circ \gamma : I \to \{\pm 1\}$ eine stetige Abbildung mit $\det \circ \gamma(0) = 1$ und $\det \circ \gamma(1) = -1$ sein. Widerspruch!