Lisa Hefendehl-Hebeker, Universität Duisburg-Essen

Was ist und was soll die „Stoffdidaktik“?

Eröffnungsvortrag auf dem Workshop „Einblicke in die moderne Stoffdidaktik“

Karlsruhe (KIT), 11. Februar 2022

Prolog

Vor knapp 50 Jahren habe ich begonnen, mich der Fachdidaktik zuzuwenden. Ich fand es spannend, das Fach Mathematik und die in seiner Entfaltung wirksamen gedanklichen Vollzüge in Verbindung miteinander zu denken.

In dieser Zeit war die Mathematikdidaktik als Hochschuldisziplin noch im Aufbau, und es wurden heftige Debatten über ihre Berechtigung geführt. Die Gegner verfochten gern Thesen der folgenden Art:

> Wer Mathematik verstanden hat, kann auch Mathematik unterrichten. Deshalb ist eine eigene Disziplin Fachdidaktik überflüssig.

Diese These hat gewiss notwendige Bedingungen gehaltvollen Mathematikunterrichts im Blick, macht es sich aber zu einfach, weil das Geheimnis im Wort „verstehen“ liegt. Dieses bedeutet „in einer Sache stehen, darin zu Hause sein, damit umgehen können“, und was ein rechter Umgang ist, wird maßgeblich vom Verwendungskontext und seinen Beteiligten mitbestimmt. Es geht daher genauer um die Frage, welche Mathematik in welchem Ausbildungskontext geeignet ist und *wie* man sie verstanden haben muss, um gut unterrichten zu können. Diese Frage führt direkt in das Thema unserer Veranstaltung.

Das Wort „Stoffdidaktik“ habe ich übernommen, weil es mein Auftrag war. In der Genese der Mathematikdidaktik war seine Verwendung zeitweilig stark mit dem Vorwurf einer einengenden Ausschließlichkeit behaftet, auf den ich noch zu sprechen komme. Deshalb bevorzuge ich selbst die Bezeichnung „Didaktik vom Fach aus“.

1. Zielsetzungen der Stoffdidaktik

Die traditionelle Gymnasialdidaktik, geprägt von Persönlichkeiten wie Klein, Toeplitz, Lietzmann, Behnke …, war bis weit in die 1970er Jahre vorwiegend eine Didaktik vom Fach aus, und ihr Selbstverständnis entsprach etwa der folgenden Definition:

> „Unter *Didaktik der Mathematik* wird […] die Darstellung des Gegenständlich-Stofflichen der Mathematik unter dem Gesichtspunkt der Lehre verstanden.“ (Drenckhahn 1952/53, S. 205)

Diese Definition möchte ich als Ausgangspunkt nehmen und den „Gesichtspunkt der Lehre“ weit auslegen. Ich beschränke mich nicht nur auf den Schulstoff im engeren Sinne, sondern werde auch auf Fachwissen eingehen, das Lehrkräften ein gutes Rüstzeug für ihre Arbeit geben kann, erwarten wir doch von einer fachlich versierten Lehrkraft, dass sie

- die Grundlagen der Schulmathematik versteht,
- ihre innere Systematik überblickt,

- die Leistungsfähigkeit der Begriffe und Verfahren würdigen kann,
- elementare, aber nicht triviale Anwendungen kennt,
- über einen fachlichen Fundus für anspruchsvolle Übungsaufgaben, wissbegierige Schülerfragen, besondere Lernsituationen usw. verfügt.
- …

Von hier aus ergibt sich ein breites Aufgabenspektrum, das ich in zwei wesentliche Bereiche einteilen und je für sich genauer betrachten möchte:

1. Fachwissen als Grundlage und Umfeld für den mathematischen Fachunterricht
2. Analyse von mathematischen Unterrichtsinhalten im Blick auf die Vermittlung in der Schule, kurz: didaktische Analyse von mathematischen Unterrichtsinhalten

Der zweite Bereich betrifft das traditionelle Verständnis von Stoffdidaktik im engeren Sinne. Das ist eine Kernaufgabe der Fachdidaktik. Den ersten möchte ich dann folgerichtig als Stoffdidaktik im weiteren Sinne bezeichnen. Hier sehe ich Fachwissenschaft und Fachdidaktik in einer gemeinsamen Verantwortung.

1. Fachwissen als Grundlage und Umfeld für den Mathematikunterricht

In diesem Abschnitt möchte ich Aufgaben skizzieren, die einerseits einer tieferen Durchdringung und andererseits einer hilfreichen Ergänzung des mathematischen Schulstoffes dienen.

2.1 Die inhaltliche Durchdringung des kanonischen Schulstoffes

Hier geht es darum, Grundlagenwissen für den Unterricht bereitzustellen, ihn inhaltlich in seiner ganzen Breite zu entfalten, seinen Facettenreichtum und seine innere Systematik herausarbeiten, eine fachliche Langzeitperspektive zu eröffnen, Anwendungsmöglichkeiten aufzuzeigen, …

Beispiel: Elementare Geometrie:

- Abbildungen: ihre Systematik, ihr Potential (z. B. Schupp 1974)
- Geometrische Inhaltslehre: Vom Auslegen mit Plättchen bis zu infinitesimalen Methoden (z. B. H.-H. 2002)
- Spezielle Themen wie Kegelschnitte (z. B. Schupp 2000), Goldener Schnitt (z. B. Beutelspacher & Petri 1995), Spiralen (Heitzer 1998), …
- …

2.2 Über den kanonischen Schulstoff hinausdenken

Hier gibt es eine große Vielfalt von möglichen Ansatzpunkten und Zielrichtungen.

- Neue Ideen zu kanonischen Inhalten (siehe Vortragsbeispiele auf dieser Tagung)
- Neue Möglichkeiten durch neue Medien (Beispiel: Mathematik mit GeoGebra, z. B. Kaenders & Schmidt 2014)

- Zugänge zu modernen Anwendungen; Beispiele:
  - Codierungstheorie (Strichcodes, ISBN, …; z. B. Haftendorn 2010)
  - Computertomografie
  - MP3-Technik
  - Big Data
- Themen für Zusatzstoffe („Oasen"); Beispiele:
  - Besondere Kurven
  - Farey-Brüche (Humenberger 2009)
- Zusatzlektüre für besonders Interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler; Beispiel: „Das Geheimnis des kürzesten Weges" (Gritzmann-Brandenberg 2002)
- Elementarmathematische Entdeckungen – Gehalt und Prozess (z. B. Winter 1989/2016)

Auf die Bedeutung des letztgenannten Zuganges komme ich später noch einmal zurück.

Den Wert eines über den unmittelbaren Schulstoff hinausgehenden Wissensfundus für einen gehaltvollen Mathematikunterricht möchte ich etwas ausführlicher an zwei Beispielen verdeutlichen.

Beispiel 1: H. Winter (1984): Rechnen mit natürlichen Zahlen

> „Welche natürlichen Zahlen lassen sich in der Form $3 \cdot x - 4 \cdot y$darstellen, wenn man für x und y alle natürlichen Zahlen und die Null zulässt?"

Diese Aufgabe kann man in geeigneter Notation schon einem dritten oder vierten Schuljahr stellen und sie dort in Stufen bearbeiten.

Erste Stufe: Probierendes Einsetzen. Dieses trainiert die Rechenfähigkeit und führt auf die Beobachtung, dass viele Zahlen Ergebnis einer Rechnung der vorgegebenen Art sein können, manche sogar mehrfach.

Zweite Stufe: Wie kann man sich einen Überblick verschaffen? Diese Frage fordert typisch mathematische Tätigkeiten wie Ordnen und Systematisieren heraus:

$3 \cdot x - 4 \cdot 0$:	3	6	9	12	15	18	21	24	…
$3 \cdot x - 4 \cdot 1$:		2	5	8	11	14	17	20	…
$3 \cdot x - 4 \cdot 2$:			1	4	7	10	13	16	…
$3 \cdot x - 4 \cdot 3$:					6	9	12	15	…

Von hier an wiederholen sich die Ergebnisse. Hinter dieser Aufgabenidee steckt die Erkenntnis, dass man die Menge der natürlichen Zahlen mit je zwei teilerfremden Zahlen auf die vorgegebene Weise erzeugen kann. Sie hat also einen algebraischen Kern, auf den man kaum zufällig kommt, wenn man sich nicht mit Algebra beschäftigt hat.

Diese Aufgabenstellung entspringt Winters Konzept des produktiven Übens. Sie hat einen über den augenblicklichen Übungszweck hinausweisenden mathematischen Gehalt, der es ermöglicht, dass „übend entdeckt und entdeckend geübt" werden kann. Für solche Aufgabenideen ist ein großer mathematischer Fundus erforderlich.

Beispiel 2: Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). Zeichnen mit dem Geodreieck.

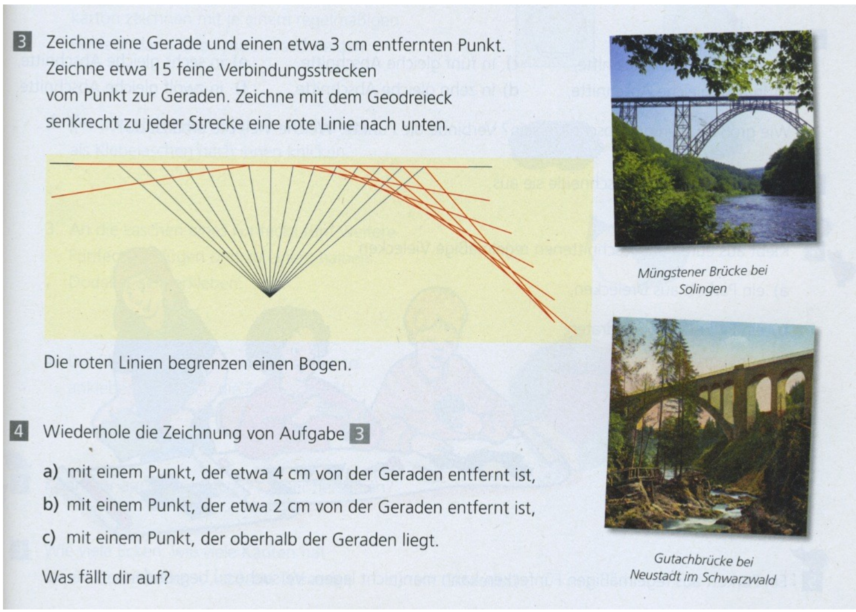

Abb.1: Konstruktionsaufgaben in der Grundschule

Hinter der Aufgabenidee in Abb. 1 steckt Wissen über Hüllkurvenkonstruktionen. Auch sie ist ein Beispiel für „produktives Üben“, in dem ein Übungszweck mit der Erstellung eines interessanten Produktes verbunden wird.

Lehrerinnen und Lehrer benötigen eine reichhaltige Wissensbasis oberhalb des Schulstoffes, die sie befähigt, gute und beziehungsreiche Aufgaben wie diese zu konzipieren oder zumindest mit solchen kompetent umzugehen.

2.3 Begleitende Sichtweisen

Wenn der Mathematikunterricht bestrebt sein soll, grundlegende Prozesse mathematischer Wissensbildung im elementaren Kontext erlebbar zu machen, dann müssen Lehrende ein Bewusstsein davon haben, wie Mathematik funktioniert.

Schon Toeplitz (1928) beklagt, dass Studierende in Prüfungen oft nur abfragbare Fakten parat haben, aber das „Getriebe des Faches“ nicht durchschauen. Fachliteratur für das Lehramt sollte deshalb möglichst bestrebt sein, dieses Getriebe durchschaubar zu machen und nicht annehmen, dass es sich von selbst erschließt, zumindest nicht dann, wenn die fachlichen Anteile am gesamten Studienvolumen knapp bemessen sind. Zum Verständnis des Getriebes gehört nach Meinung des Autors (ebd., S. 6):

- „Definitionen ihrer Grundbegriffe nicht zu memorieren, sondern in ihren Freiheitsgraden, in ihrer Austauschbarkeit zu beherrschen“
- „die Tatsachen von ihnen klar abzuheben und untereinander und nach ihrem Wert zu staffeln“
- „Analogien zwischen getrennten Gebieten wahrzunehmen oder, wenn sie ihm vorgelegt werden, sie durchzuführen“

- „Gelerntes auf andere Fälle anzuwenden und anderes mehr.“

Unter „anderes mehr“ könnte man zum Beispiel weiter ergänzen:

- Treibende Fragen bewusst machen: Was ist aus mathematischer Sicht interessant und wichtig?
  - Beispiel 1: Ein Dreieck ist durch drei geeignet gewählte Bestimmungsstücke konstruktiv festgelegt. Wie sieht ein rechnerisches Pendant dazu aus? Welche Bezüge bestehen dann zwischen den Konstruktionen und den Rechenverfahren? (Generell gibt es in der Mathematik ein starkes Bedürfnis nach Kohärenz.)
  - Beispiel 2: Es gilt $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Gilt dann auch $\sqrt[2]{a}=\sqrt[4]{a^2}$? ¿Allgemein: Warum spielen Beweise für die „Unabhängigkeit vom Repräsentanten“ eine so große Rolle?)
- Bereichsspezifische Strategien auf einer Metaebene erläutern.
  - Beispiel: der dialogische Charakter der ε-δ-Beweise.
- Leistungsfähigkeit eines Werkzeuges beschreiben
  - Beispiel: Die Integralfunktion einer Veränderlichen kann man als Flächeninhaltsfunktion deuten. Sie eignet sich aber auch dazu, Bogenlängen und Volumina zu berechnen. Wie kommt das? Was ist der gemeinsame begriffliche Kern?
- Stellung einer Betrachtung im Theorieaufbau verorten
  - Beispiel: Die natürlichen Zahlen entstanden als gedankliches Ordnungsmittel für Phänomene der Lebenswelt, die Bruchzahlen als verfeinertes Ordnungsmittel; die negativen Zahlen wurden aus formal-algebraischen, nicht aus lebenspraktischen Bedürfnissen erschaffen, die irrationalen Zahlen entstanden im Reflektieren über die aus der geometrischen Praxis gewonnenen Erkenntnisse und dem Bedürfnis des Erklärens und Begründens, das wir als den Ursprung des wissenschaftlichen Denkens mit weitreichenden Folgen ansehen. Die negativen und die irrationalen Zahlen haben eine andere „logische Höhe“ (Drenckhahn ebd.) als die natürlichen Zahlen.

Dieses Wissen um mathematische Sicht- und Arbeitsweisen, das für eine erfolgreiche fachliche Enkulturation erforderlich ist, wird in der Literatur durch verschiedene Konstrukte beschrieben:

- *Mathematische Bewusstheit* (Kaenders et al. 2014)
- *Mathematical Sophistication* (Seaman & Szydlik 2007, Bauer 2017)

  Sophistication: Erfahrenheit, Ausgereiftheit, Kultiviertheit, hoch entwickelter Stand, verfeinertes Bewusstsein
- *Epistemologische Bewusstheit* (Prediger & H.-H. 2016)

  Episteme (ἐπιστὴμη) ist in der griechischen Philosophie die höchste Form des Wissens. „Es bedeutet, dass man über etwas steht, vor etwas steht, in dem Sinne, dass man es beherrscht.“ (Schadewaldt 1979, S. 173).

Professionelle Mathematiker*innen haben solches Wissen implizit verfügbar. Für Novizen erschließt es sich nicht ohne Weiteres von selbst. Ihnen müssen häufig erst die Augen dafür geöffnet werden.

2. Didaktische Analyse von mathematischen Unterrichtsinhalten

In diesem Abschnitt wende ich mich den Aufgaben der Stoffdidaktik im engeren Sinne zu. Sie sind unmittelbar auf den Mathematikunterricht bezogen und folgen der Leitfrage: *Wie kann man einen mathematischen Gegenstand in den Horizont der Lernenden rücken? Wie kann man ihn geeignet elementarisieren?*

Der Umgang mit dieser Frage hat seit den 1970er Jahren eine Entwicklung in Richtung zunehmender Ausdifferenzierung erfahren. Sie reicht von vorausgehenden Analysen bis zur Ausbildung von integrativen Sichtweisen, die empirische Befunde einbeziehen. Diese Entwicklung möchte ich im Folgenden in einigen wesentlichen Etappen schildern.

3.1 Anfänge: Die didaktisch orientierte Sachanalyse

Die „didaktisch orientierte Sachanalyse“ war in der Frühzeit der Etablierung zumindest im Sekundarbereich der vorrangige Arbeitsschwerpunkt der Didaktik. Nach Griesel (1972) hat eine solche Analyse am Anfang oder im Zentrum jeder unterrichtsbezogenen Entwicklung zu stehen, und das möchte ich auch heute noch unterschreiben.

Zugehörige Aufgabenbestimmungen findet man in der Literatur an verschiedenen Stellen. Drenckhahn (1952) nennt

- „Bloßlegung der zu den in Frage stehenden Erkenntnissen […] führenden Anschauungen, Vorstellungen, Begriffen, Urteilen und Schlüssen“
- Berücksichtigung von verschiedenen „Gegenstandslogiken“ bzw. „logischen Höhenlagen“.

Oehl (1962) betont die Bedeutung der grundlegenden Fachstrukturen für den Mathematikunterricht von der Grundschule an und fordert, dass fachbezogene Aspekte und bereichsspezifische Denkweisen von Anbeginn eine wesentliche Rolle spielen müssten. Er weist der Ausbildung von *Grundvorstellungen* eine wichtige Funktion zu.

- Grundvorstellungen sind zunächst Handlungsschemata bzw. mentale Modelle, die zwischen Realität und Mathematik vermitteln, so etwa
  - das Aufteilen und Verteilen als Grundvorstellungen für die ganzzahlige Division,
  - das Konzept der lokalen Änderungsrate als Grundvorstellung für die Ableitung.
- Grundvorstellungen können auch bereits mathematische Begriffe und Operationen einbeziehen, so etwa in der grundlegenden Charakterisierung des prozentualen Wachstums durch folgende Eigenschaft: „Zu gleichlangen Zeiten gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor.“ (Kirsch 1976b).

In dieser Zeit entstanden Arbeiten von bleibendem Wert, und ihre Errungenschaften lassen sich am besten durch markante Leitideen und Beispiele charakterisieren. Dazu zitiere ich im Folgenden vor allem Beispiele von Arnold Kirsch, der vor einem Monat (am 13. Januar 2022) 100 Jahre alt geworden wäre. Hier schließt sich ein Kreis, denn er ist der Vater von Andreas Kirsch, der das wissenschaftliche Komitee dieses Workshops leitet.

Leitidee 1: Zugänglichmachen durch Vereinfachen ohne zu verfälschen (Kirsch 1977)

Ein einfach zugänglicher Beweis für die Unlösbarkeit der Gleichung $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2\,;m,n\in N$ erfolgt über einen Vergleich der möglichen Endziffern von m^2und $2n^2$ (Kirsch 1977). Er ist leichter verständlich als der übliche Widerspruchsbeweis, weil er eine geringere „logische Höhe“ (Drenckhahn, s. o.) hat.

Eine verfälschende Vereinfachung ist demgegenüber die „Fruchtsalatalgebra“ (Arcavi et al. 2017, S. 51 ff). Wenn man Termumformungen wie $5a+2b-3a+b=2a+3b$ durch Rückgriff auf Äpfel und Bananen erklärt, mag das zwar für den Augenblick sehr einleuchtend sein, führt aber langfristig zu Fehlvorstellungen. Es verführt Schüler*innen zu der generellen Annahme, Buchstaben in der Algebra ständen für Gegenstände und nicht für Zahlen, und sie erkennen die Rolle des versteckten Multiplikationszeichens nicht. Im Sinne von A. Kirsch ist eine solche Vereinfachung nicht „intellektuell redlich“.

Leitidee 2: Das Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge

Hierbei geht es um das adressatengerecht tarierte Verhältnis zwischen inhaltlich-anschaulichem Argumentieren und formalem Beweisen. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1: Die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen $|a+b|\leq|a|+|b|$ kann mit Hilfe der Metapher des Gehens auf Wegen anschaulich einsichtig gemacht werden.

Beispiel 2: Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung (Kirsch 1976b)

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

Dieser Sachverhalt kann mit Hilfe der Grundvorstellung „Ableitung als lokale Zuwachsrate“ plausibel gemacht werden.

$$\text{Für kleine } \Delta x \text{ gilt: } F'(x)=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\approx\frac{F(x)+f(x)\cdot\Delta x-F(x)}{\Delta x}\text{¿}f(x)$$

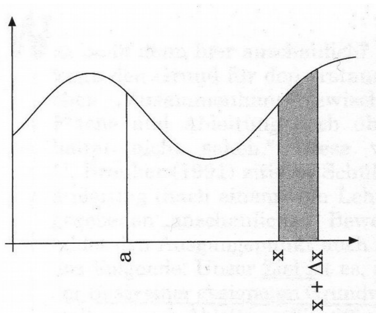

Abb. 2: lokaler Zuwachs einer Ordinatenfläche

Auf Kirsch geht angeblich auch die „Pinselstrich-Vorstellung“ zurück: Wenn man sich vorstellt, dass die Ordinatenfläche mit gleichmäßigen vertikal verlaufenden dünnen Pinselstrichen gefärbt wird, dann ist der lokale Flächenzuwachs proportional zur Strichlänge (also der Ordinatenhöhe).

Professionelle Mathematiker*innen verwenden in der informellen Kommunikation häufig metaphorische Redewendungen, die in den Endprodukten meist zugunsten einer formal strengen Darstellung verschwunden sind. Für Lehrkräfte ist es wichtig, beide Darstellungsweisen präsent zu haben, in Beziehung zu setzen und adressatenbezogen zu gewichten: die anschauliche Darstellung erzeugt die Verankerung in der Vorstellung, die formale die theoretische Absicherung. Zur Lehrkunst gehört es sicherlich, Lernende auch für eine strenge Betrachtung zu motivieren und die benötigte Anstrengungsbereitschaft zu wecken.

Leitidee 3: Vertikale Entwicklung von Unterrichtsthemen (Aufbau nach dem „Spiralprinzip“)

Beispiel 1: A. Kirsch (1969): *Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung.*

Dieser Aufsatz schildert eine vertikale gedankliche Entwicklung. Den Ausgangspunkt bilden elementare Grundvorstellungen zur direkten Proportionalität („Zum Doppelten, Dreifachen … der ersten Größe gehört das doppelte, Dreifache … der zweiten Größe, zum n-ten Teil gehört der n-te Teil.“). Das Ziel ist das Arbeiten mit linearen Funktionen. Informelle Arbeitsmethoden, z. B. das Ausfüllen von Tabellen mit Hilfe der Grundvorstellungen, dienen dem Vertrautwerden in den Zwischenstadien und erklären auch das Dreisatzschema sowie die Rolle des Proportionalitätsfaktors.

Gewicht in kg	Preis in Euro
4	10
2	?
6	?
8	?

Beispiel 2: A. Kirsch (1976a): *Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht*

Entfaltet wird ein Aufbau nach dem Spiralprinzip. Dieser beginnt mit der Schachbrettaufgabe (Zweierpotenzen) in Kl. 5/6, fährt fort mit prozentualen Wachstumsraten in Kl. 7/8 und gelangt dann von der sprunghaften zur lückenlosen Beschreibung von Wachstumsprozessen in Kl. 9/10. Dabei ergibt sich auch eine neue Motivation und Anwendung des Wurzelbegriffs.

Ein Beispiel für einen solche Längsschnitt aus neuerer Zeit ist der Aufsatz von Biehler & Prömmel (2013): Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum $1/\sqrt{n}$ – Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept.

Auch diese Liste lässt sich durch weitere Leitideen und Kristallisationskerne fortsetzen, z. B. *paradigmatische Beispiele* (Freudenthal 1973) oder *operative und generische Beweise* (Kempen 2019).

3.2 Ausdifferenzierung: Phänomenologische Analyse

Die Phänomenologische Analyse wurde angestoßen durch das 1983 erschienene Buch von Freudenthal: „Didactical Phenomenology of Mathematical Structures“. Dessen Grundphilosophie besagt:

- Unsere mathematischen Konzepte, Begriffe und Strukturen wurden entwickelt, um Phänomene der physikalischen, sozialen und mentalen Welt zu organisieren.

- Eine *phänomenologische Beschreibung* erfasst diese Konzepte, Begriffe und Strukturen in ihrer Beziehung zu
  - den Phänomenen, für die sie geschaffen wurden, und
  - den Phänomenen, zu deren Beschreibung sie im Lernprozess der Menschheit erweitert wurden.
- Eine solche Beschreibung wird zur *didaktischen Phänomenologie*, wenn sie den Lernprozess der jungen Generation im Blick hat.
- Es ist ein Weg, Lehrenden zu zeigen, wo Lernende in den Lernprozess der Menschheit einsteigen können.

In dem entsprechenden Kapitel über Brüche entfaltet der Autor, dass Brüche vielfältige Erscheinungsformen haben.

Bruch als Anteil: Dieser Bruchzahlaspekt steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Verb „brechen“: Um gerecht teilen zu können, wird die Einheit in Stücke gebrochen. Beispielsituationen können handelnd mit konkretem Material erfahren werden. Dabei kann das Bezugsganze in vielerlei Formen und Beschaffenheit auftreten: es kann zusammenhängend oder diskret, begrenzt oder unbegrenzt sein, und die Anteile können regelmäßige Muster bilden oder unstrukturiert bleiben.

Bruch als Vergleichsinstrument: Beispiele für diese Erscheinungsform sind Aussagen zum Größenvergleich: „Stab A ist $\frac{5}{6}$ mal so lang wie Stab B.“ oder: „Im Raum sind befinden sich $2\frac{1}{2}$-mal so viele Erwachsene wie Kinder.“ In diesen Situationen wird nichts „in Stücke gebrochen“, sondern Objekte werden in Bezug auf ihre Größe in Beziehung gesetzt. Brüche haben hier die Bedeutung von „ratio“ als Ausdruck von Zahlenverhältnissen. Dieser Bruchzahlaspekt ist abstrakter als der Anteilaspekt und indiziert Kontexte, in denen gemischte Zahlen sinnvoll werden.

Bruch in einem Operator: Diese Auffassung resultiert aus einer übergeordneten Sicht, die viele Erscheinungsweisen umfasst. Den Bruch als Maßzahl, als Punkt auf einer Zahlengeraden und schließlich als rationale Zahl erhält man durch Anwenden des Bruchoperators auf eine Einheit.

Eine solche phänomenologische Betrachtung erzeugt ein Bewusstsein für die Vielfalt der Aspekte, die ein mathematischer Begriff haben kann, für die Spezifika der einzelnen Aspekte mit ihren jeweiligen Anforderungen und Abstraktionsniveaus wie auch für die innere Gemeinsamkeit, um derentwillen sie unter einen gemeinsamen Begriff fallen. Sie liefert Grundlagen für natürliche Lernanlässe und Anhaltspunkte für eine genetisch orientierte Unterrichtsplanung.

Dass natürliche Lernanlässe nicht immer an die historischen Ursprungssituationen anknüpfen müssen, zeigt M. van den Heuvel-Panhuizen (2003) am Beispiel des Stabmodells für den Auslastungsgrad. Diese Art von Anzeigen findet man heute überall, z. B. als Ladestandanzeige einer Batterie (Handy, Computer) oder als dynamische Anzeige für den Verlauf einer Aktion an einem Bankautomaten.

Abb. 3: Stabanzeige

Solche Anzeigen eignen sich als Modellvorstellung für die Beschreibung von Anteilen. Das Darstellungsmittel kann dann gedanklich so präzisiert und elaboriert werden, dass sich hieran die Prozentrechnung entwickeln lässt. Ich skizziere exemplarisch zwei Stationen im Umgang mit dem Modell.

(1) Schätzmodell: „Von 40 Plätzen eines Parkplatzes sind 24 belegt. Stelle die Auslastung an einer Füllanzeige dar.“

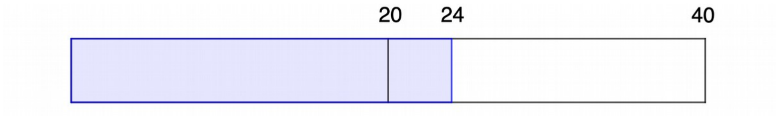

Abb. 4: Stabanzeige als Schätzmodell

Das Problem kann informell gelöst werden, indem man sich schrittweise an die gesuchte Marke herantastet: Wenn der ganze Balken für 40 Plätze steht, steht die Hälfte für 20, die Mitte zwischen 20 und 40 für 30, und dann kann man die 24-er-Marke schließlich abschätzen.

(2) Visualisierung des Prozentsatzes mit Hilfe einer zweiten Skala

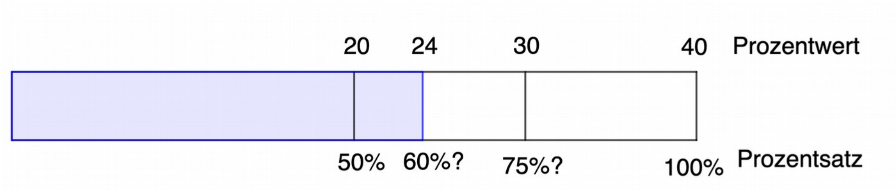

Abb. 5: Stabanzeige mit zwei Skalen

Das geschieht zunächst wieder informell, indem Relationen zwischen speziellen Zahlen herausgefunden und kluge Strategien verwendet werden. Dabei wird intuitives Wissen über die direkte Proportionalität zwischen Prozentsatz und Prozentwert verwendet.

3.3 Weitere Ausdifferenzierung: epistemologische Analysen

Seit den 1980-er Jahren entwickelte sich in der Unterrichtsforschung die so genannte empirische Wende. Sie wurde ausgelöst durch technologische Entwicklungen, die es gestatteten, Unterrichtsepisoden aufzuzeichnen, wiederholt zu betrachten und in ihren Feinstrukturen zu analysieren. Dabei zeigte sich, dass mathematisches Wissen nicht durch eine festgefügte vorangestellte Beschreibung vollständig erfasst werden kann. Es entwickelt sich im einzelnen Lernenden in der Unterrichtssituation auf individuelle Weise. Es bildet sich als theoretisches Wissen in der Auseinandersetzung mit Referenzkontexten (Steinbring 1994), wie zum Beispiel ein Funktionsgraph, ein Zahlenmuster oder die oben geschilderte Stabanzeige. Dabei können Irrwege, Fehlvorstellungen sowie Denkhürden auftreten, und es können Vorstellungsumbrüche erforderlich sein.

Epistemologische Analysen verfolgen die Frage, wie Verstehen in einer solchen Dynamik zustande kommt. Es geht um Fragen

- zur Struktur der Prozesse mathematischer Erkenntnis und ihrer erforderlichen Denkhandlungen,
- zur begleitenden Rolle der Sprache (Erkenntnisse explizit machen, strukturelle Klarheit gewinnen).

Wir betrachten dazu ein Beispiel zum Thema „Anteil vom Anteil“, ausgehend von der folgenden Sachsituation (nach Glade 2014):

> Im Tschad geht nur ungefähr ein Drittel der Sechsjährigen in die Schule und besucht die erste Klasse. Der Rest der Kinder muss arbeiten. Bis zur 5. Klasse bleibt von den Schulkindern nur ungefähr die Hälfte in der Schule.

a) Zeichne ein Bild zu dieser Situation.

b) Wie groß ist der Anteil der Kinder, die bis zur 5. Klasse eine Schule besuchen?

Aus didaktischer Sicht sind zu diesem Problem folgende Fragen interessant: Welche Möglichkeiten gibt es, in einer 6. Klasse einen solchen Zusammenhang zu erarbeiten? Welche Begründungs- und Sinnbasis kann den Lernenden hierfür angeboten werden? Welche Beziehungen zwischen mathematischen Begriffen, Verfahren und realen Gegebenheiten werden dabei entwickelt? Welcher Art Denkprozesse werden dabei angestoßen? Das sind Fragen zur Natur des Erkenntnisgegenstandes Mathematik und zur Struktur der Prozesse mathematischer Erkenntnis (Steinbring 2009).

Die nachfolgende Abbildung stellt beispielbezogen ein in Unterrichtswerken gängiges Verfahren dar, einen Anteil von einem Anteil zu bestimmen, und gibt Anlass, dazu eine formale Regel zu erarbeiten.

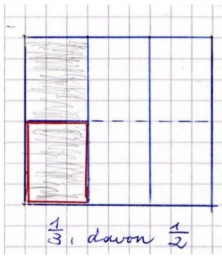

Abb. 6: Anteil vom Anteil

Der Zusammenhang wird hier nicht in der Sachsituation selbst erarbeitet, sondern mit Hilfe eines strukturellen Diagramms und damit in einem bereits theoretischen, idealisierten Kontext. Dieser Kontext stellt für die Schülerinnen und Schüler einen neuen und eigenständigen Lerngegenstand mit einem eigenen Problemgehalt dar. Auch eine bereits fertige Darstellung dieses Typs ist nicht selbsterklärend. Sie muss in der Dynamik von Ablesen und Hineinlesen entschlüsselt und richtig gedeutet werden. Dabei spielt der Wechsel der Bezugseinheit eine wichtige Rolle.

Um solche Darstellungen selbst auf Rechenpapier entwickeln und mit Sinn füllen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler ein geeignetes Handlungsschema entwickeln. Sie müssen einsehen, welche Ökonomie in der Verschränkung von vertikalen und horizontalen Einteilungen steckt, das Rahmenrechteck dafür günstig wählen, die Größen von Zielrechteck und Ausgangsrechteck unter Verwendung der Unterteilung aufeinander beziehen und dabei die Passung zwischen Arithmetik und Geometrie erkennen und nutzen.

Solche epistemologischen Analysen bewirken eine Bewusstseinsschärfung. Sie helfen, den Referenzkontext als eigene sachliche Anforderung ernst zu nehmen, diesen in seinen Einzelheiten und deren wechselseitigem Aufeinander-bezogen-Sein zu erkennen und sachlich wie sprachlich die notwendige Genauigkeit und Explizitheit zu entwickeln und den Lernenden vorzuleben. Dazu gehört es, die Struktur des zu erwerbenden Wissens klar zu sehen und Bewusstheit darüber zu erlangen, welche Bestandteile koordiniert werden müssen und wie diese ineinandergreifen. Damit können epistemologische Analysen zur inhaltlichen und strukturellen Klarheit des Unterrichts beitragen (vgl. Ufer et al. 2015, Erath 2017).

3.4 Eine integrative Sicht: Strukturgenetische didaktische Analysen

Schon früh hat Freudenthal in prägnanter Schlichtheit erklärt (Freudenthal 1974, S. 124):

> „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen."

Damit räumt er ein, dass eine vorgängige Sachanalyse nicht den ganzen Kosmos an Bedeutung erfassen kann, der in einem mathematischen Sachverhalt beschlossen ist. Dieser scheint in jeder Lern- und Kommunikationssituation auf je eigene Weise und in unterschiedlichen Facetten auf.

Das heißt aber auch, dass didaktisch orientierte Sachanalysen durch die Beobachtung von Lernprozessen an Aspektfülle gewinnen können.

Im Jubiläumsband „25 Jahre mathe 2000" beurteilt Wittmann die didaktische Analyse mathematischer Unterrichtsinhalte in ihrer ursprünglichen Form so:

> „Trotz der imponierenden Leistungen, die sie aufzuweisen hatte und die auch heute noch größte Bedeutung haben, hatte [sie] einen gravierenden Nachteil: Sie war zu eng mit dem damals vorherrschenden belehrenden Unterricht verbunden. Daher stand sie von dem Augenblick an unter starker Kritik, als mit den Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung nachgewiesen wurde, dass die im Unterricht tatsächlich ablaufenden Lernprozesse nicht so gesteuert werden können, wie es in der Didaktik des belehrenden Unterrichts angenommen wurde. Wissen kann nicht einfach vermittelt werden, sondern entwickelt sich im einzelnen Lernenden im sozialen Kontakt mit der Lehrperson und anderen Lernenden auf individuelle Weise […]." (Wittmann 2012, S. 273).

Die Entwicklung, die Wittmann hier andeutet, hat der didaktischen Analyse den Vorwurf einer einseitigen Engführung und den Begriff „Stoffdidaktik" einen polemischen, mit der Unterstellung des Altbackenen behafteten Beigeschmack eingetragen.

Dennoch beklagt Wittmann es als Fehlentwicklung, dass die didaktische Analyse der Inhalte als Forschungsmethode immer mehr in den Hintergrund trat, und betont:

> „Die Erfahrungen bei der Entwicklungsforschung im Projekt „mathe 2000" zeigen, dass es ein fundamentaler Fehler war, aus den Mängeln der Stoffdidaktik alter Prägung den Schluss zu ziehen, fachliche Analysen hätten als Forschungsmethode in der Mathematikdidaktik keine Bedeutung mehr. Das Bild ändert sich nämlich grundlegend, wenn man didaktische Analysen nicht auf den Stoff in seiner fertigen Form reduziert, sondern die Prozesse einbezieht, die bei der Bearbeitung mathematischer Themen in der authentischen mathematischen Praxis ablaufen. Für solche strukturgenetischen didaktischen Analysen, wie ich sie nennen möchte, ist die Mathematik nach wie vor von zentraler Bedeutung, aber eben in ihrem Prozesscharakter, wie er bei der aktiven Beschäftigung mit Mathematik – allein oder im Austausch mit anderen – in Erscheinung tritt. Unterschiedliche Lösungsansätze, verschiedenen Darstellungsformen, Unklarheiten, Fehler, Irrwege, Missverständnisse, usw. treten dabei in natürlicher Weise auf." (ebd.)

Das Buch von H. Winter „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht" (1989, Neuaufl. 2016) ist ein Musterbeispiel für solche strukturgenetischen Analysen, ebenso das Buch „Arithmetik als Prozess" (Müller et al. 2004) und aus neuester Zeit die kumulative Habilitationsschrift von Stefan Berendonk (2019) mit dem Titel „Elementarmathematisches Entdecken als pädagogische Aufgabe".

3.5 Didaktische Analyse heute – mögliche Leitfragen und Methoden

Die Aufgabe der Stoffdidaktik aus der strukturgenetischen Sicht besteht also darin, fachliche Analysen mit erkenntnistheoretischen und empirischen Beobachtungen zu verschränken. Das Design und die Erprobung von Lernumgebungen auf der Basis theoretischer und praktischer Einsichten ist hierfür eine geeignete Methode.

Orientierende Leitfragen könnten sein:

- Horizontale Entwicklung: Welche Phänomene können mit dem jeweiligen Wissensbereich organisiert werden?
- Welche Darstellungskontexte und mentalen Modelle eigenen sich zu ihrer Erarbeitung?
- Welche Denkhandlungen und Rationalisierungspraktiken werden verwendet? (z. B. plausibles Schließen vs. exaktes Beweisen, inhaltliches vs. formales Verständnis, gedankliches Ordnen, Systematisieren …). Welche Lernhürden, Fehlerquellen usw. tauchen dabei auf?
- Vertikale Entwicklung: Wie entwickelt sich ein Wissensbestand aus ersten intuitiven Ansätzen bis zur theoretischen Ausreifung? Wie läuft eine denkbare genetische Entwicklung vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken und schließlich präzisen Beschreiben in der Sprache der Mathematik? Wie sieht eine intellektuell redliche Entfaltung auf verschiedenen Stufen der Denkentwicklung aus? Welche Darstellungsformen bieten sich jeweils an?

Epilog

Ich habe begonnen mit einer Einstellung, die ganz auf Fachwissen setzt. In zugespitzter Betrachtung gab es Bestrebungen seitens der Fachwissenschaft, die Etablierung einer Fachdidaktik zu vermeiden.

Meine Ausführungen sollten zeigen, dass es vielerlei Gründe gibt, sich aus fachlicher Sicht mit mathematischen Unterrichtsinhalten zu beschäftigen, und dies immer wieder neu, aus verschiedenen Perspektiven und in bedarfsgerechter Auflösung. Ein didaktisch sensibles Mathematikverständnis setzt dabei aber andere Schwerpunkte, als sie in Darstellungen innerhalb der fachlichen Community üblich sind.

Heute ist die Fachdidaktik eine etablierte Hochschuldisziplin. Es gibt aber Stimmen, die hier in einigen Sparten gegenläufige Vermeidungsstrategien am Werk sehen, d. h. Tendenzen, eine intensive Beschäftigung mit fachlichen Inhalten zu vermeiden, zu umgehen oder auszublenden. So veröffentlichte zum Beispiel Jahnke (2010) in den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik einen Beitrag mit dem Titel „Vom mählichen Verschwinden des Faches aus der Mathematikdidaktik“

Ich habe versucht zu zeigen, dass die Beziehung der Fachdidaktik zu ihrem Fach vital und kräftig bleiben muss, dass diese Beziehung aber für neue Erkenntnisse aus andern Arbeitsbereichen offen sein und sich in dieser Offenheit weiter entwickeln sollte.

Der aktuelle Workshop ist aus dem Bestreben erwachsen, die Mathematikdidaktik vom Fach aus wieder zu stärken. Dafür danke ich den Initiatoren ausdrücklich und wünsche dem Anliegen Schlagkraft und Erfolg.

Literatur

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017): The Learning and Teaching of Algebra. London, New York: Routledge

Bauer, Th. (2017). Schulmathematik und Hochschulmathematik – was leistet der höhere Standpunkt? Der Mathematikunterricht , 63, 36–45.

Berendonk, St. (2019). Elementarmathematisches Entdecken als pädagogische Aufgabe. Essen: Habilitationsschrift.

Beutelspacher, A, & Petri, B. (1996). Der Goldene Schnitt. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Biehler, R. & Prömmel, A. (2013). Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum 1/√n – Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. *Stochastik in der Schule, 33(2)*, 14-25.

Drenckhahn, F. (1952/53). Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 5, 205 – 211. Reprinted in H.-G. Steiner (Ed.) (1978): *Didaktik der Mathematik* (pp. 3 – 18). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Erath, K. (2017). Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens. Rekonstruktion von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen. Wiesbaden: Springer.

Freudenthal, H. (1974). Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6(3), 122–124.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe (Bd. 1 und 2). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer.

Gritzmann, P. & Brandenberg, R. (2002): Das Geheimnis des kürzesten Weges. Ein mathematisches Abenteuer. 2. Auflage. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York.

Haftendorn, D. (2010). Mathematik sehen und verstehen. Heidelberg: Springer Spektrum

Hefendehl-Hebeker, L. (2002). Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. Augsburger mathematisch-naturwissenschaftliche Schriften 41, herausg. von F. Pukelsheim. Augsburg: Wißner-Verlag 2002.

Heitzer, J. (1998). Spiralen – ein Kapitel Phänomenlaer Mathematik. Leipzig: Klett

Jahnke, Th. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 89*, 21-24.

Kaenders, R. & Schmidt, R. (Hrsg.) (2014). Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kaenders, R., Kvasz, L. & Y. Weiss-Pidstrygach, Y. (2014). Mehr Ausgewogenheit mathematischer Bewusstheit in Schule und Universität. In: Roth, Jürgen; Bauer, Thomas; Koch, Herbert & Prediger, Susanne (Hrsg.) Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik. S. 149–160, Springer Spektrum: Wiesbaden.

Kempen, L: (2018). Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kirsch, A. (1969). Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, *16*(1), 41-55.

Kirsch, A. (1976a). Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. *Didaktik der Mathematik,* 4(4), 257-284.

Kirsch, A. (1976b). Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik,* 4(2), 87 – 105.

Kirsch, A. (1977). Aspects of Simplification in Mathematics Teaching. In H. Athen & H. Kunle (eds), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*. Karlsruhe: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98-120.

Müller, G. N., Steinbring, H. & Wittmann E. Ch. (Hrsg.) (2004). Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Prediger, S., Hefendehl-Hebeker, L. (2016): Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37, 239-262.

Schupp, H. (1974). Abbildungsgeometrie. Weinheim, Basel: Beltz.

Seaman, C. & Szydlik, J. [2007]: Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 10, 167-182

Steinbring, H. (1994). Frosch, Känguruh und Zehnerübergang – Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Maier (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung* (pp. 192-217)*.* Köln: Aulis.

Steinbring, H. (2009). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective.* Springer.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 11(10), 1–16.

Ufer, S., Heinze, A. & Lipowski. F. (2015). Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik,* S. 411–434. Heidelberg: Springer Spektrum.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.: The learning paradox and the learning miracle: thoughts on primary school mathematics education. Journal für Mathematik-Didaktik 24 (2003) Heft 2, 96 - 121.

Walser, H. (1998). Symmetrie. Stuttgart, Leipzig: Teubner.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematiklehren* 2, 4 – 11.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46.

Winter, H. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wittmann, E. Ch. (2012). Das Projekt "mathe 2000": Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In G. N. Müller, Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Eds.), *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben* (pp. 265–279). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Das Zahlenbuch 4.* Leipzig: Klett.

Schadewaldt, W. (1979): Die Anfänge der Philosophie bei den Griechen. Frankfurt: Suhrkamp.