Konstruktion mit Zirkel und Lineal

EINBLICKE IN DIE STOFFDIDAKTIK - 1. KARLSRUHER DIDAKTIK-WORKSHOP
11.02.22

Klassische Probleme

- Quadratur des Kreises
- Kubenverdopplung
- Winkeldreiteilung

Klassische Probleme

- Quadratur des Kreises

  Konstruktion eine Strecke mit der Länge $\sqrt{\pi}$

- Kubenverdopplung

  Konstruktion einer Strecke mit der Länge $\sqrt[3]{2}$

- Winkeldreiteilung

  Drittelung eines Winkels; Lösung von x^3-0,75x-0,25cos(α)=0
  Gegenbeispiel 60°: Konstruktion des Winkels 20°

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

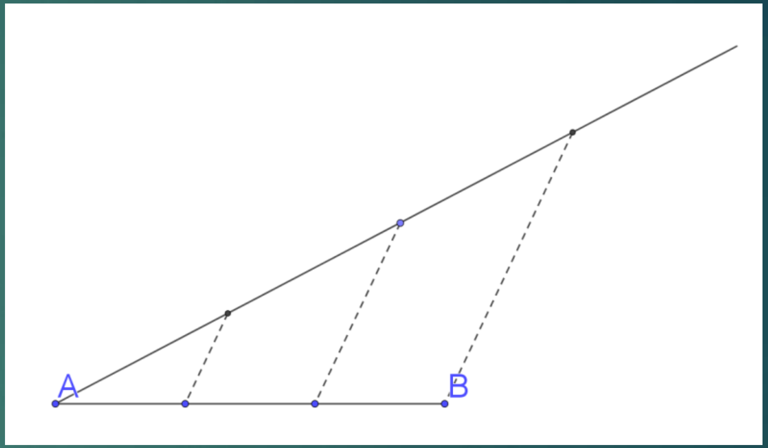
- Lineal:
  ermöglichst das Ziehen von geraden Linien beliebiger Länge
- Zirkel:
  ermöglicht das Zeichnen einer Kreislinie
  damit: das Markieren von Punkten mit einem gegebenen Abstand bzw. das Abtragen von gegebenen Streckenlängen
- Mit dem Zirkel lässt sich eine Streckenlänge markieren, die man als „Einheit“ definiert.

Mögliche Konstruktionen

- Konstruierbar: $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\ldots\frac{1}{2^n}$

  (Mittelsenkrechte)

- Konstruierbar: jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$, damit jede rationale Zahl



Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Erweiterung des rationalen Zahlkörpers

- Polynomring $\mathbb{Q}[X]$: Polynome endlichen Grads mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$
- Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ist $\mathbb{Q}[X]$ ein euklidischer Ring, d.h. wir können „so“ rechnen, wie wir es aus $\mathbb{Z}$ gewohnt sind
  - nullteilerfrei, kommutativ, mit 1
  - Hauptidealring: einzelne Elemente erzeugen die Ideale des Rings
  - euklidischer Algorithmus funktioniert
    (Bewertungsfunktion: Grad eines Polynoms)
  - ZPE-Eigenschaft:
    eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente bzw. Primelemente

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Rechnen „wie in $\mathbb{Z}$“:

- Restklassenbildung: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Ist p eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p)$ isomorph zu $\mathbb{F}_p$, dem Körper mit p Elementen.

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

- Analog: Ist f ein irreduzibles Polynom, so ist $\mathbb{Q}[X]/(f)$ ein Körper.
- Ist α eine Nullstelle/Wurzel von f, so ist $\mathbb{Q}[X]/(f)$ isomorph zu $\mathbb{Q}(\alpha)$, dem (kleinsten) Körper, der $\mathbb{Q}$ und α (somit auch α^{-1}) enthält.
- $\mathbb{Q}(\alpha)$ kann als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit der Basis $1, \alpha, \alpha^2, \dots \alpha^{n-1}$ aufgefasst werden, wobei n = deg(f).
- Die Körpererweiterung hat den Grad $[\mathbb{Q}(\alpha): \mathbb{Q}] = n$.

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Beispiel:

- $X^2 - 2$ hat als Nullstellen $\pm\sqrt{2}$
- $X^2 - 2$ ist irreduzibel (und prim) in $\mathbb{Q}[X]$
- $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \cong \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ $(\cong \mathbb{Q}(-\sqrt{2})\ )$
- $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ist der kleinste Körper, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält
- $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ kann als VR über $\mathbb{Q}$ mit der Basis 1, $\sqrt{2}$ aufgefasst werden
- Grad der Körpererweiterung: $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2.$

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Konstruierbare Zahlen:

- Punkte bzw. Längen ergeben sich aus sich schneidenden Strecken/Geraden und Kreisen.
- Dies führt pro Konstruktionsschritt auf eine Gleichung vom Grad 1 oder 2.
- Dies führt pro Konstruktionsschritt auf eine Körpererweiterung vom Grad 1 (trivial) oder 2.
- Eine konstruierbare Zahl liegt also in einem Erweiterungskörper K über $\mathbb{Q}$, dessen Grad $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$ eine 2-Potenz ist.

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Konstruierbare Zahlen:

- Quadratur des Kreises:
  $\sqrt{\pi}$ ist konstruierbar, wenn π konstruierbar ist

  π ist transzendent (Lindemann, 1882), d.h. es gibt kein Polynom endlichen Grades mit Nullstelle π, damit: π ist nicht konstruierbar.

- Kubenverdopplung:
  $\sqrt[3]{2}$ ist Nullstelle des irreduziblen Polynoms X^3-2
  $[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}] = 3 \neq 2^k$
  $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar

Mathematischer Hintergrund zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Konstruktion regelmäßiger n-Ecke:

- Das regelmäßige n-Eck ist konstruierbar genau dann wenn die n-te Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ konstruierbar ist.
- $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist Wurzel von $X^n - 1$, dies ist kein irreduzibles Polynom
- Ist n=p prim, so ist $\frac{X^p - 1}{X - 1}$ irreduzibel vom Grad p-1.
- p-te Einheitswurzel konstruierbar ↔ p-1 ist 2-Potenz, d.h. $p = 2^k + 1$.
- Man kann zeigen: k muss auch Zweipotenz sein, also $p = 2^{2^l} + 1$.
  Für l = 0, 1, 2, 3, 4 sind dies die Fermat'sche Primzahlen, d.h.:
  Das regelmäßige 3-, 5-, 17-, 257-, 65537-Eck ist konstruierbar.

...an der Schule:

...an der Schule: Drei Grunderfahrungen nach Winter

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61 (1995), S. 37-46.

…an der Schule: Drei Grunderfahrungen nach Winter

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61 (1995), S. 37-46.

Konstruktion mit Zirkel und Lineal an der Schule: Gründe

- Kulturgut
- „Allgemeinwissen“
- Schulung des Deduktiven Denkens
- Förderung der Problemlösefähigkeit
- Aber auch:
  Förderung von Handfertigkeit und dem händischem Umgang mit Werkzeug, motorische Schulung

Konstruktion mit Zirkel und Lineal
Bildungsplan BW, Klasse 7/8

Ortslinien konstruieren und mit Ortslinien arbeiten
(7) die *Mittelsenkrechte* einer *Strecke*, die *Winkelhalbierende* eines *Winkels* mit Zirkel und Lineal konstruieren
(8) geometrische Probleme unter Verwendung von *Ortslinien* (*Kreislinie, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele, Thaleskreis*) zeichnerisch lösen, auch mit dynamischer Geometriesoftware, und die Lösung beschreiben
P 2.2 Probleme lösen 3, 6, 9, 10, 11, 13 P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 8 P 2.5 Kommunizieren 1, 2, 3, 5
(9) den *Umkreismittelpunkt* und den *Inkreismittelpunkt* eines *Dreiecks* mit Zirkel und Lineal konstruieren und die Konstruktion begründen
P 2.1 Argumentieren und Beweisen 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13
(10) *Tangenten* an *Kreise* in *Punkten* auf dem *Kreis* und von *Punkten* außerhalb konstruieren

(Bildungsplan 2016, Mathematik, allgemein bildendes Gymnasium, Baden-Württemberg, www.bildungsplaene-bw.de)

Konstruktion mit Zirkel und Lineal
Bildungsplan BW, Klasse 7/8

- Prozessbezogene Kompetenzen
  (Allgemeine mathematische Kompetenzen)

P 2.2 Probleme lösen 3, 6, 9, 10, 11, 13
P 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 5, 8
P 2.5 Kommunizieren 1, 2, 3, 5

P 2.1 Argumentieren und Beweisen 1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13

(Bildungsplan 2016, Mathematik, allgemein bildendes Gymnasium, Baden-Württemberg, www.bildungsplaene-bw.de)

Konstruktion mit Zirkel und Lineal
Bildungsplan BW, Klasse 7/8

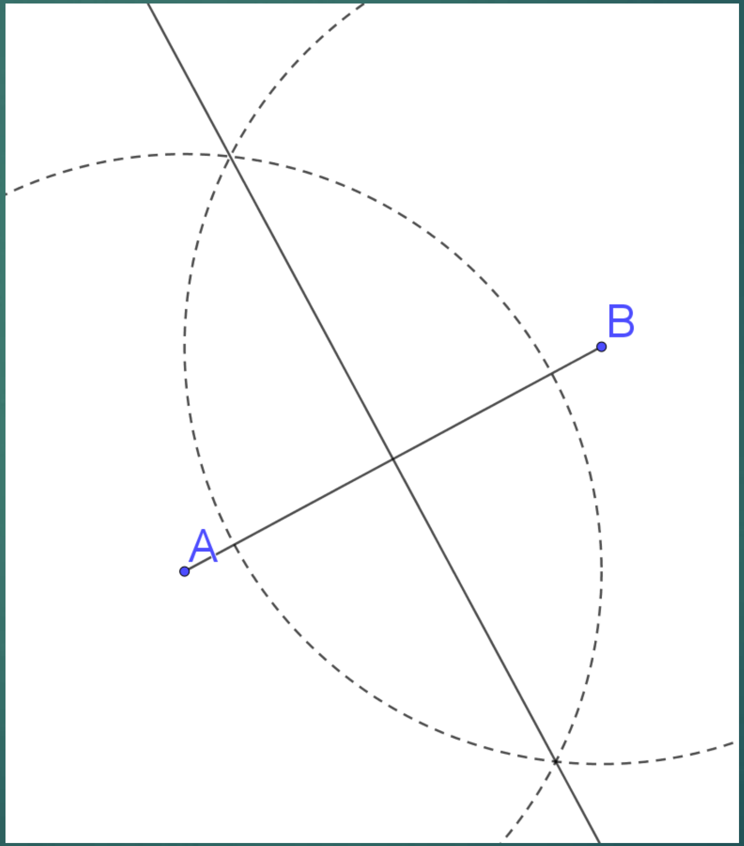
- Inhaltsbezogene Kompetenzen

(7) die *Mittelsenkrechte* einer *Strecke*, die *Winkelhalbierende* eines *Winkels* mit Zirkel und Lineal konstruieren
(8) geometrische Probleme unter Verwendung von *Ortslinien* (*Kreislinie, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele, Thaleskreis*) zeichnerisch lösen, auch mit dynamischer Geometriesoftware, und die Lösung beschreiben
(9) den *Umkreismittelpunkt* und den *Inkreismittelpunkt* eines *Dreiecks* mit Zirkel und Lineal konstruieren und die Konstruktion begründen
(10) *Tangenten* an *Kreise* in *Punkten* auf dem *Kreis* und von *Punkten* außerhalb konstruieren

(Bildungsplan 2016, Mathematik, allgemein bildendes Gymnasium, Baden-Württemberg, www.bildungsplaene-bw.de)

Konstruktion der Mittelsenkrechten

So:



Aber warum??

Konstruktion der Mittelsenkrechten

Zwei Zugänge zur Mittelsenkrechten

- Ortslinieneigenschaft
  Die Mittelsenkrechte der Strecke AB gibt den Ort aller Punkte an, die von A und B gleich weit entfernt sind.
- Geometrische Eigenschaft
  Die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist orthogonal zu AB und verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke AB.

Konstruktion der Mittelsenkrechten

Zugang über die **Ortslinieneigenschaft**
(Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind)

- Mittelpunkt der Strecke AB ist von A und B gleich weit entfernt
- ein weiterer bzw. zwei weitere solche Punkte:
  Schnittpunkte der Kreislinien mit gleichem Radius um B und A
  (Ortslinieneigenschaft des Kreises)

Konstruktion der Mittelsenkrechten

Zugang über die **Ortslinieneigenschaft**
(Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind)

- Mittelpunkt der Strecke AB ist von A und B gleich weit entfernt
- ein weiterer bzw. zwei weitere solche Punkte:
  Schnittpunkte der Kreislinien mit gleichem Radius um B und A
  (Ortslinieneigenschaft des Kreises)

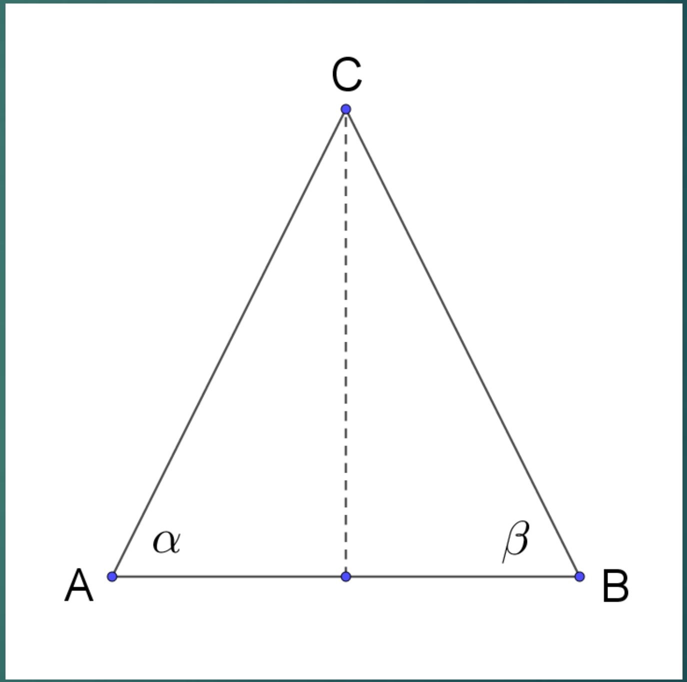
- Warum liegen die Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, auf der **Geraden** durch diese Schnittpunkte?

Konstruktion der Mittelsenkrechten

Warum liegen die Punkte,
die von A und B gleich weit
entfernt sind, auf einer **Geraden**?

Konstruktion der Mittelsenkrechten
Satz vom gleichschenkligen Dreieck

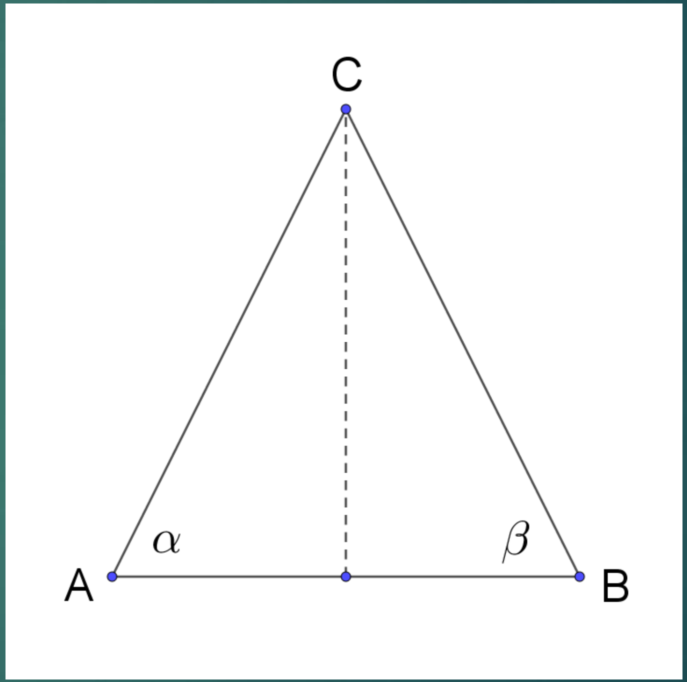
Warum liegen die Punkte,
die von A und B gleich weit
entfernt sind, auf einer **Geraden**?



Konstruktion der Mittelsenkrechten: Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann sind die den Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

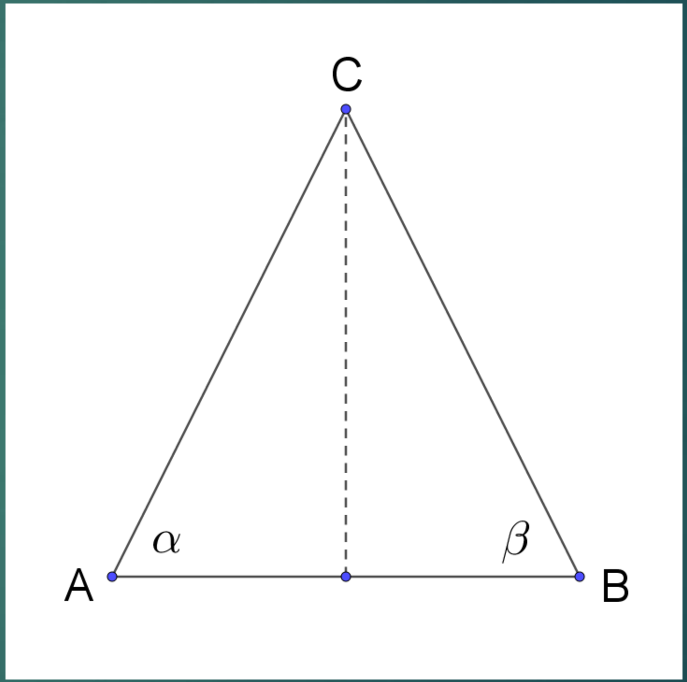
Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, dann sind die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang.



Konstruktion der Mittelsenkrechten: Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, **dann** sind die den Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, **dann** sind die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang.



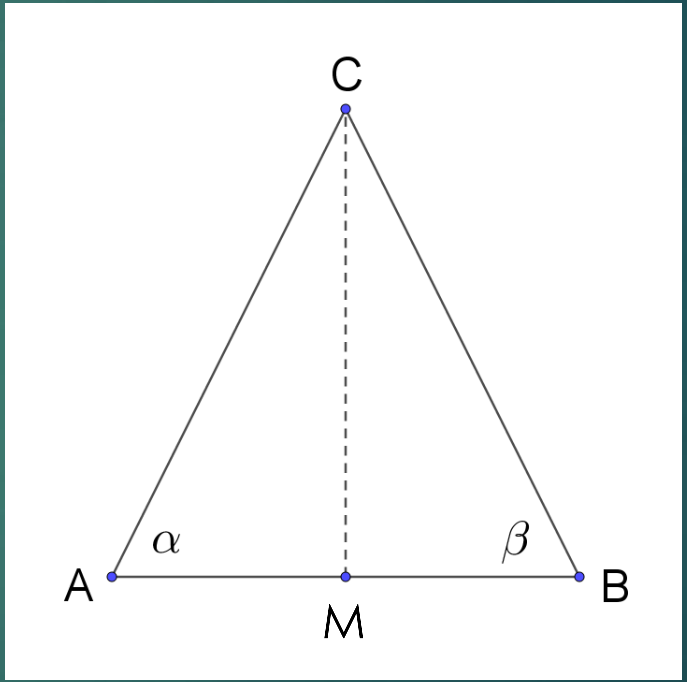
Konstruktion der Mittelsenkrechten: Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, **dann** sind die den Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

(Beweis: SSS (mit MC))

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, **dann** sind die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

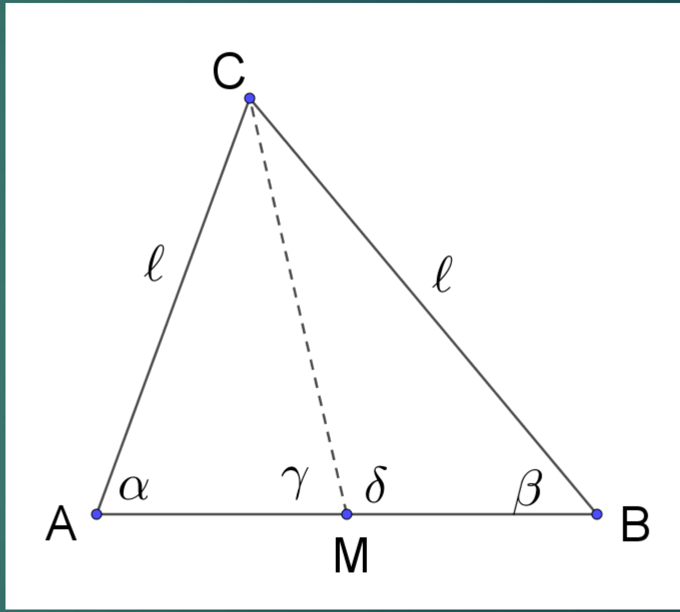
(Beweis: WSW (mit Höhe h_c))



Schule, Klasse 7: Beweisbedürftigkeit???

Konstruktion der Mittelsenkrechten
Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Warum liegen die Punkte,
die von A und B gleich weit
entfernt sind, auf einer **Geraden**?



AC=BC

zz. C liegt auf der zu AB orthogonalen
Geraden durch M

Beweis:

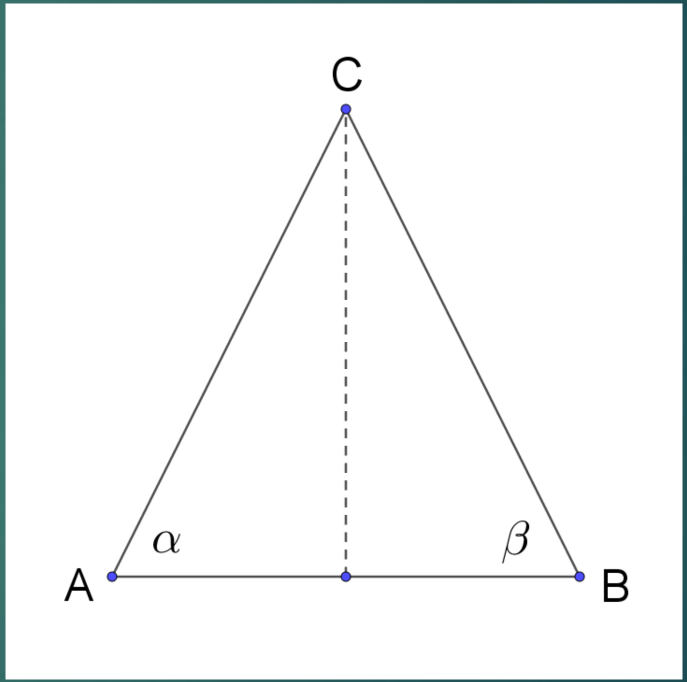
Da AC=BC, ist $\alpha = \beta$. Damit:
AMC kongruent zu MBC (SWS).
Also: $\gamma = \delta$; da $\gamma + \delta = 180°$, ist $\gamma = \delta = 90°$.

((Anm. Beim Vortrag am 11.02.22 war dieser Beweis als Widerspruchsbeweis formuliert.
Ein aufmerksamer Zuhörer wies mich darauf hin, dass das auch direkt geht. DANKE!))

Konstruktion der Mittelsenkrechten
Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Warum liegen die Punkte,
die von A und B gleich weit
entfernt sind, auf einer **Geraden**?

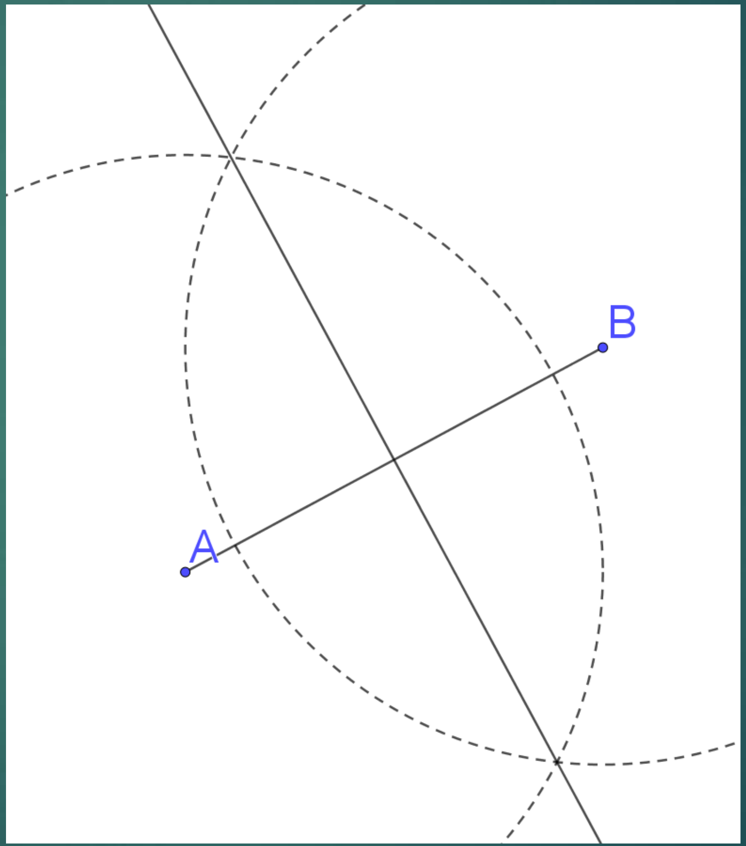
Jeder Punkt C, der von A und B gleich weit entfernt ist, bildet mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck und liegt auf der Symmetrieachse des Dreiecks.



Konstruktion der Mittelsenkrechten

Damit:

Aus der Ortslinieneigenschaft
folgt
die geometrische Eigenschaft.



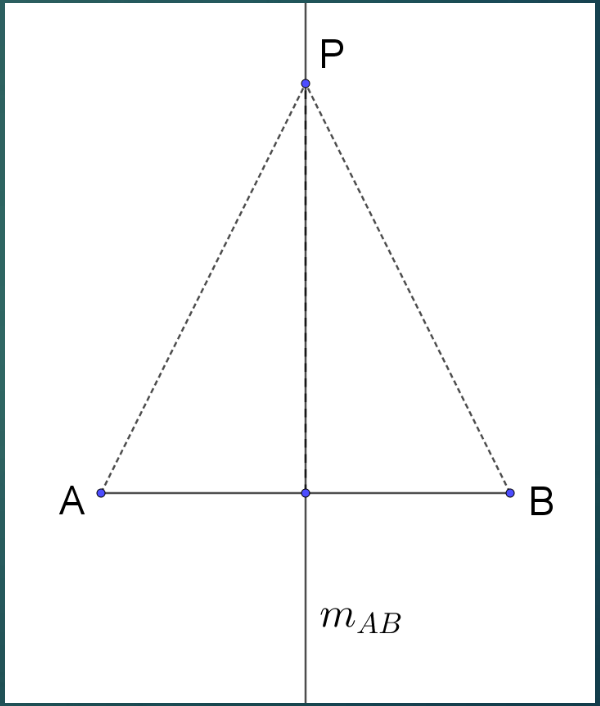
Konstruktion der Mittelsenkrechten

Zugang über die **geometrische Eigenschaft**
(Mittelsenkrechte m_{AB} verläuft senkrecht zu AB und enthält den Mittelpunkt der Strecke AB)

- z.z.: Ortslinieneigenschaft

  Wenn P auf m_{AB} liegt,
  dann hat P zu A und B den gleichen Abstand.

  Wenn P zu A und B den gleichen Abstand hat,
  dann liegt P auf m_{AB}.



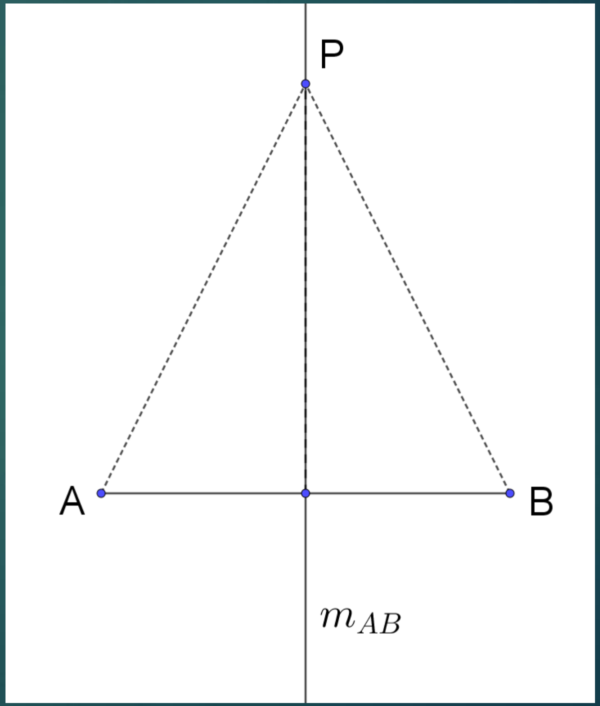
Konstruktion der Mittelsenkrechten

Zugang über die **geometrische Eigenschaft**
(Mittelsenkrechte m_{AB} verläuft senkrecht zu AB und enthält den Mittelpunkt der Strecke AB)

- z.z.: Ortslinieneigenschaft

  Wenn P auf m_{AB} liegt,
  dann hat P zu A und B den gleichen Abstand.
  (Beweis: Eigenschaft der Achsenspiegelung)

  Wenn P zu A und B den gleichen Abstand hat,
  dann liegt P auf m_{AB}.
  (Beweis: z.B. mit Kontradikition, schwer in Klasse 7)



Satz von der Mittelsenkrechten 1&2

Satz 1

Wenn P auf m_{AB} liegt, dann hat P zu A und B den gleichen Abstand.

Satz 2

Wenn P zu A und B den gleichen Abstand hat, dann liegt P auf m_{AB}.

Konstruktion des Umkreises

Typisches Einstiegsproblem:

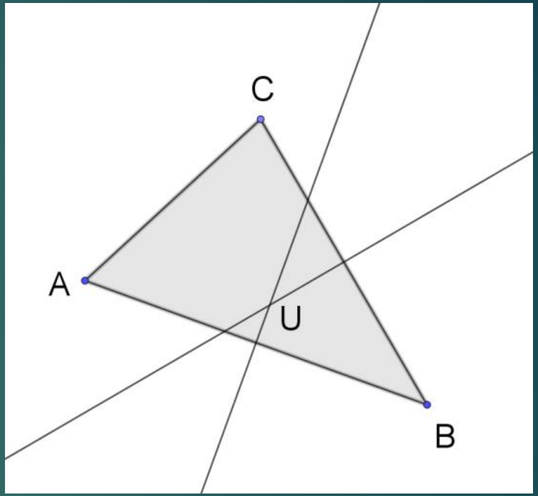
Bau eines Objekts (z.B. Sendemast, Spielplatz…),
der von drei Orten (Ortschaften, Schulen, …) gleich weit entfernt ist

Sätze vom Umkreis

Satz 1

Wenn U der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks ist,

dann hat U zu jeder Ecke des Dreiecks den gleichen Abstand.



Satz 2

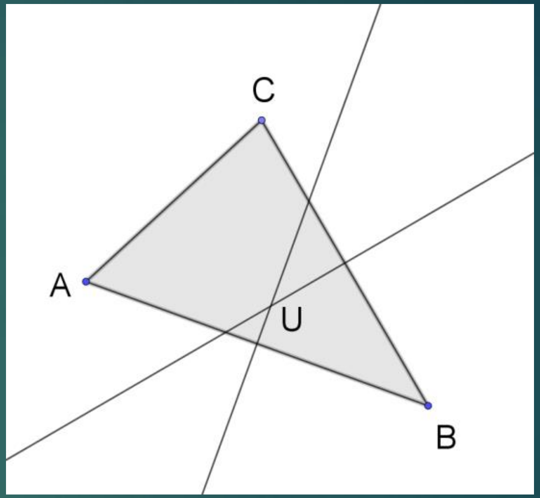
In einem Dreieck schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

Sätze vom Umkreis

Satz 1

Wenn U der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks ist,

dann hat U zu jeder Ecke des Dreiecks den gleichen Abstand.

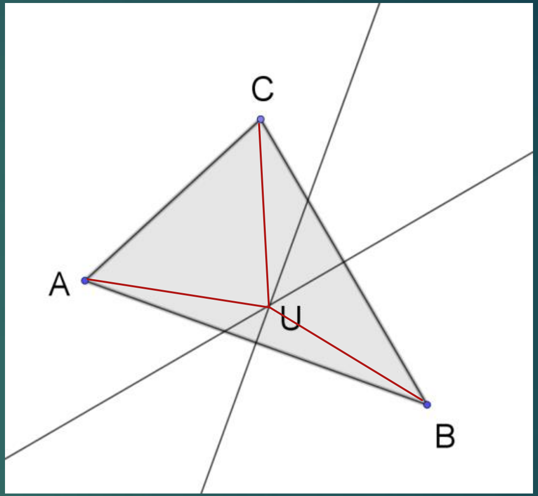


Sätze vom Umkreis

Satz 1

Wenn U der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks ist,

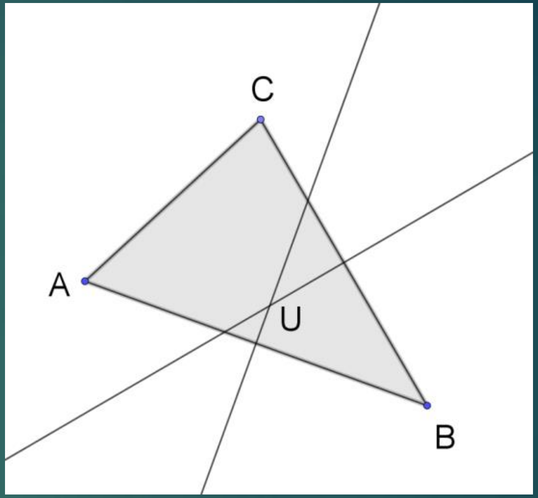
dann hat U zu jeder Ecke des Dreiecks den gleichen Abstand.



Beweis:

Satz von der Mittelsenkrechten 1: U auf m → AU = BU)

Sätze vom Umkreis



Satz 2

In einem Dreieck schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.

Beweis:

Satz von der Mittelsenkrechten 2: AU = BU = CU → U liegt auf m_{AC}

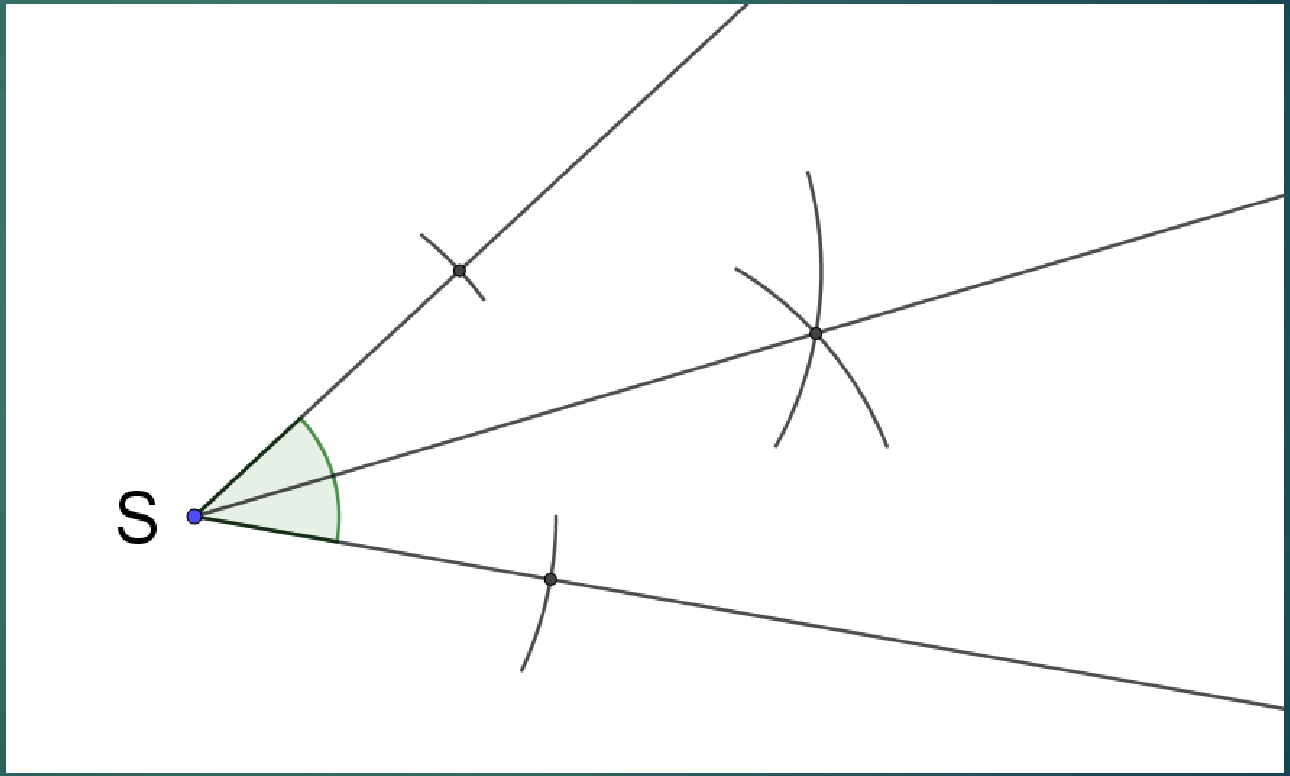
Konstruktion der Winkelhalbierenden

Zwei Zugänge zur Winkelhalbierenden

- Ortslinieneigenschaft
  Die Winkelhalbierende eines Winkels α gibt den Ort aller Punkte an, die von den Halbgeraden, die den Winkel α einschließen, gleich weit entfernt sind.
- Geometrische Eigenschaft
  Die Winkelhalbierende eines Winkels α ist die Halbgerade, die am Scheitel des Winkels α beginnt und den Winkel α halbiert, d.h. mit den beiden Schenkeln des Winkels α den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt

Konstruktion der Winkelhalbierenden

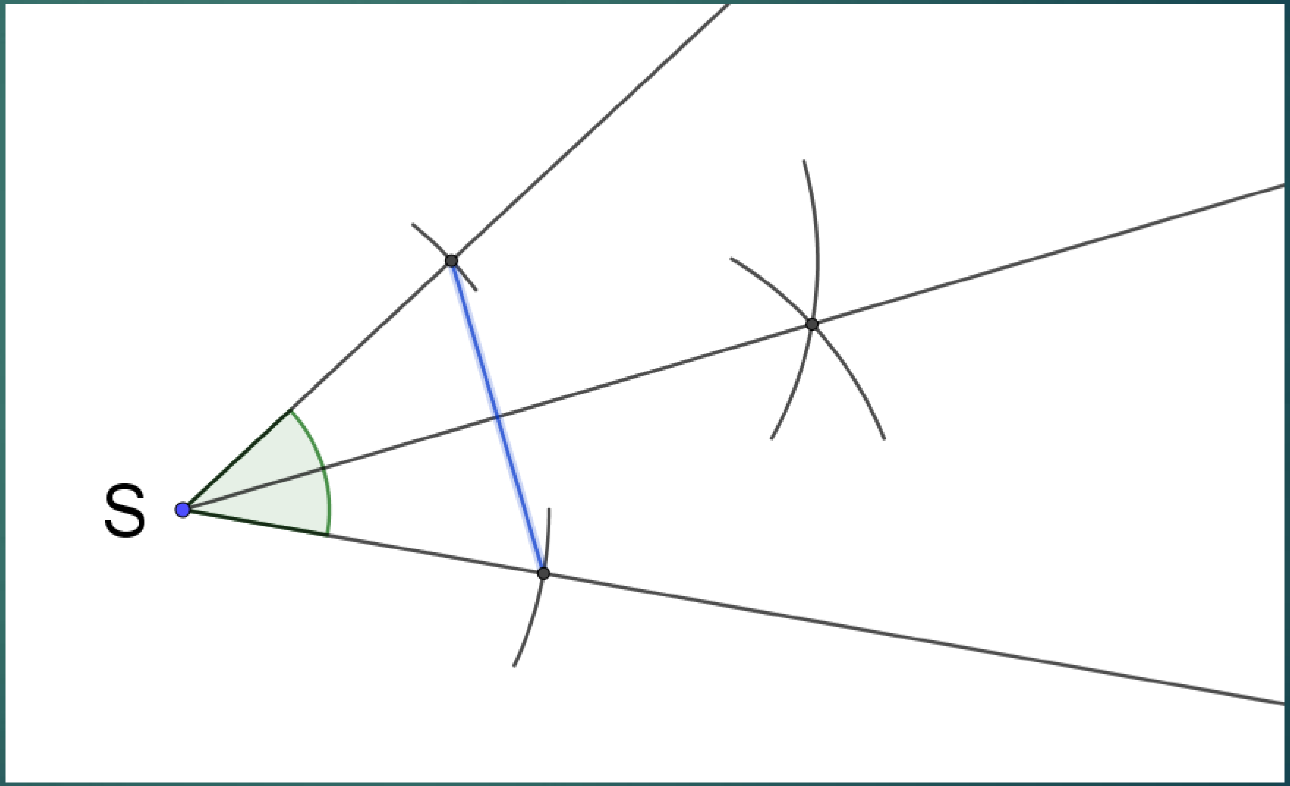
So:



Aber warum??

Konstruktion der Winkelhalbierenden

Warum??

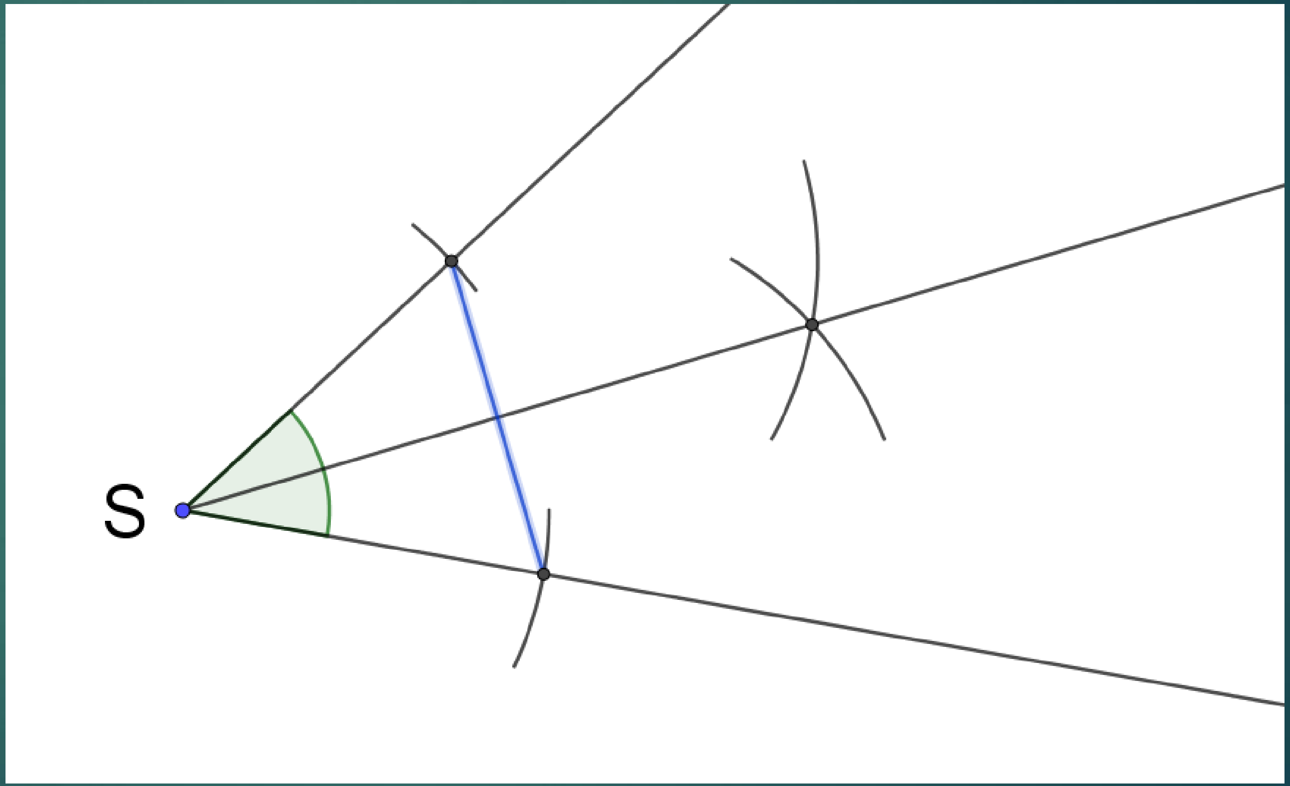


Konstruktion der Winkelhalbierenden

gleichschenkliges Dreieck

Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse

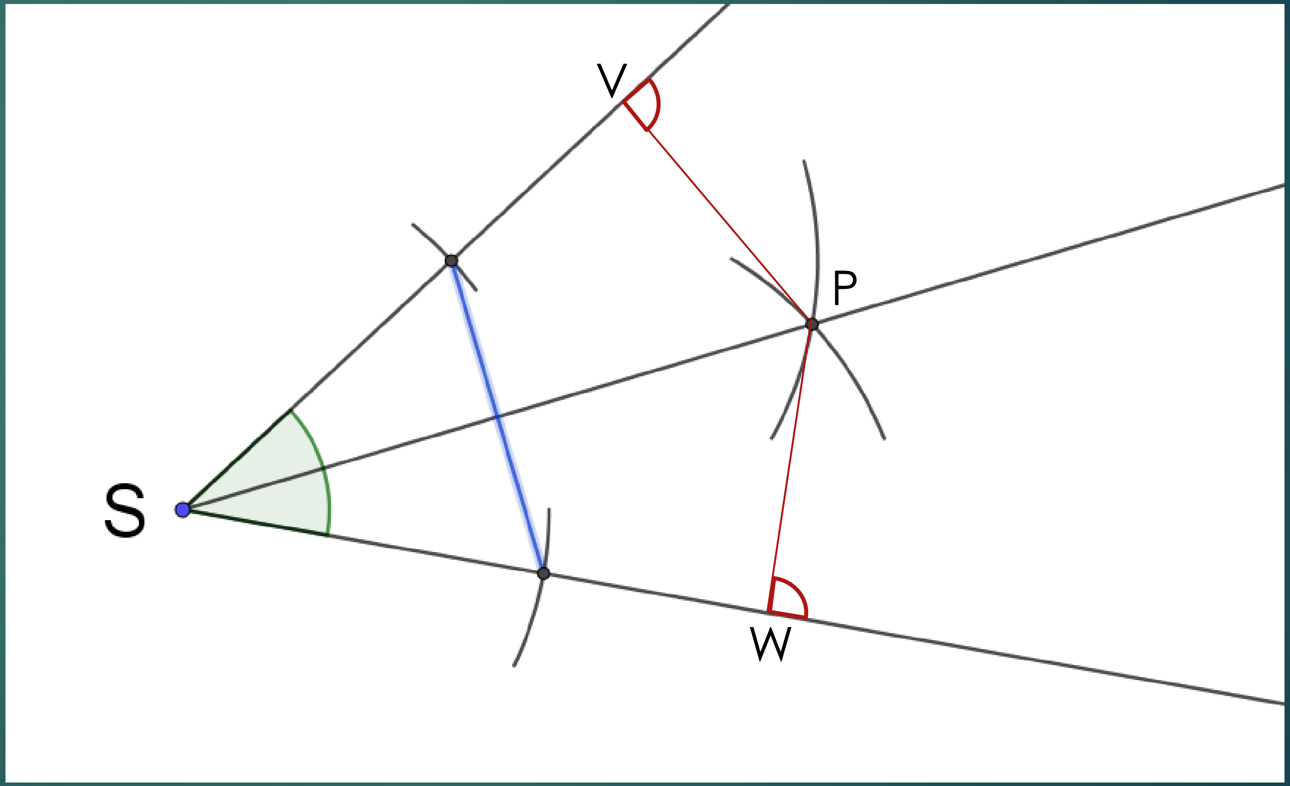
→ bedient die geometrische Eigenschaft der WH



Konstruktion der Winkelhalbierenden

Von der geometrischen Eigenschaft zur Ortslinieneigenschaft:

PV = PW mit WSW

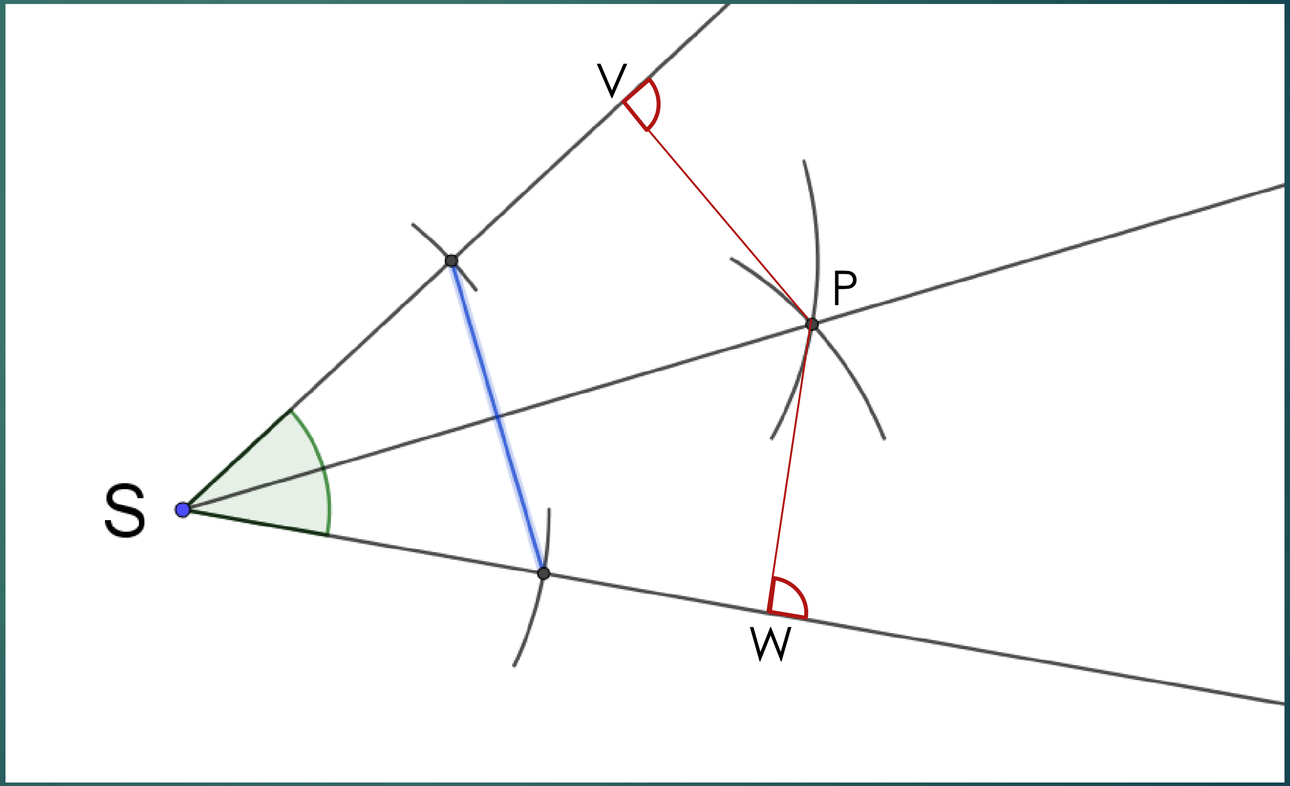


Konstruktion der Winkelhalbierenden

Von der geometrischen Eigenschaft zur Ortslinieneigenschaft:

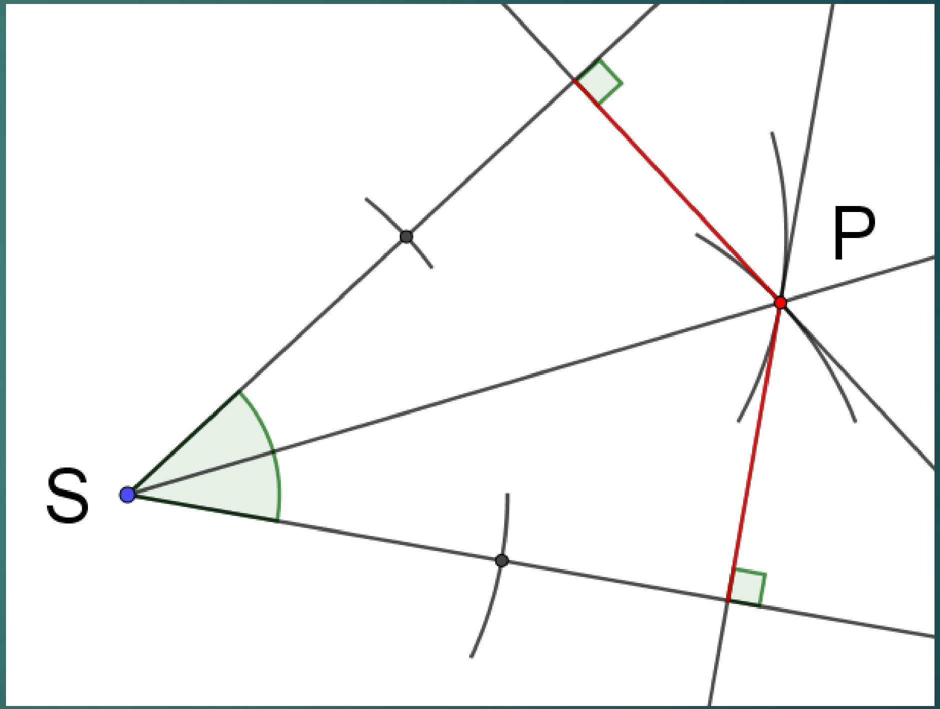
PV = PW mit WSW

(schwierig in Kl. 7)



Konstruktion der Winkelhalbierenden

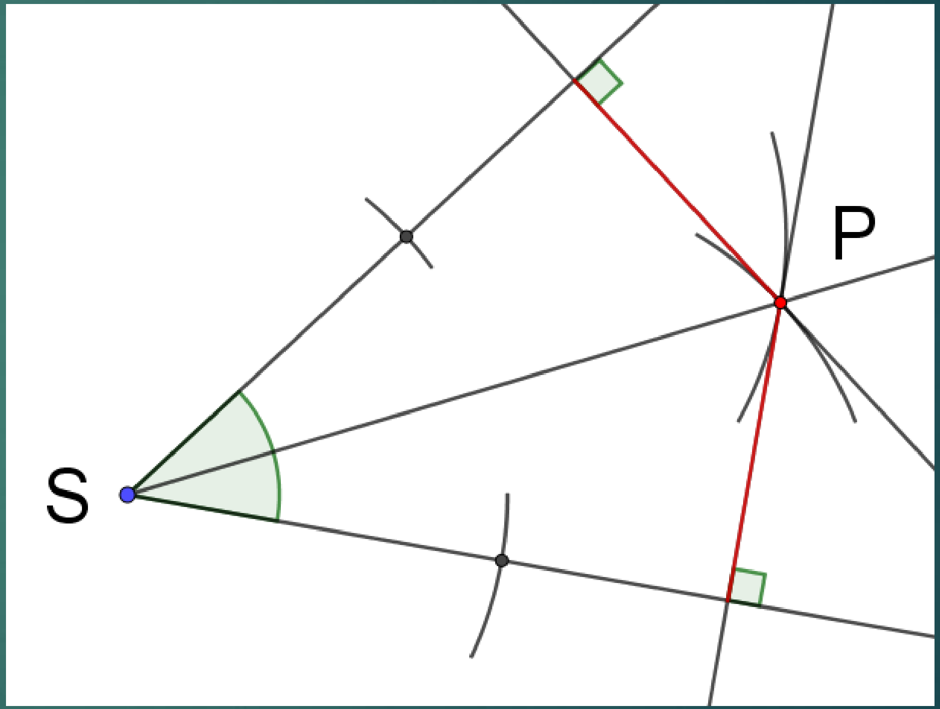
Von der Ortslinieneigenschaft
zur
geometrischen Eigenschaft:



Konstruktion der Winkelhalbierenden

Von der Ortslinieneigenschaft
zur
geometrischen Eigenschaft:

P ist gleich weit von den
beiden Schenkeln entfernt



Konstruktion der Winkelhalbierenden

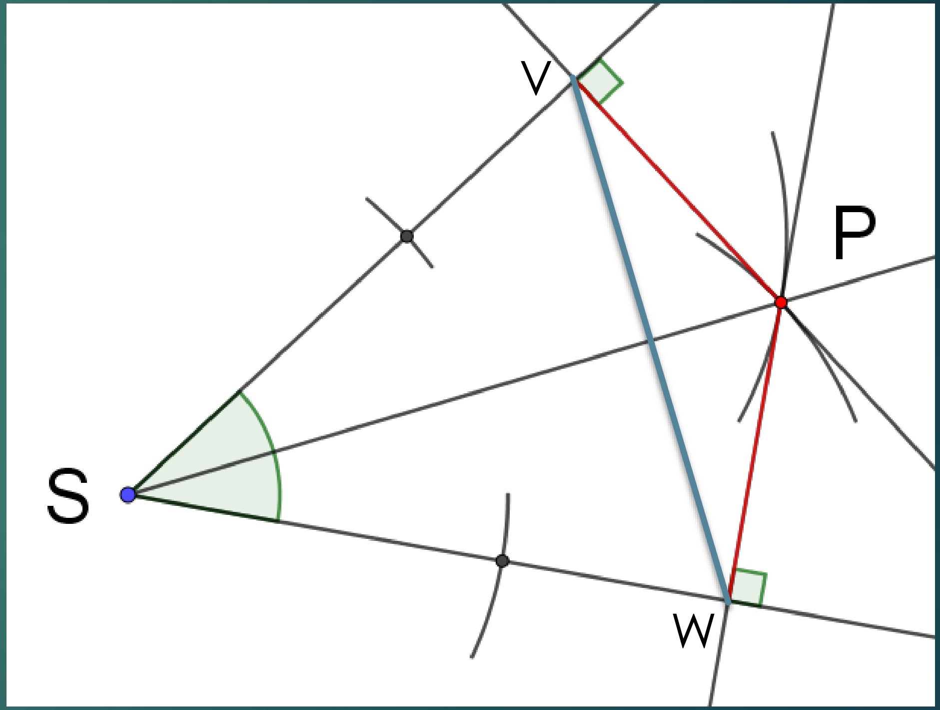
Ortslinieneigenschaft

PV = PW

z.z.: Halbgerade SP halbiert den Winkel bei S
bzw. Mittelsenkrechte von VW enthält S
bzw. WVS ist gleichschenklig

Beweis:

VWP ist gleichschenklig
→ WVS ist auch gleichschenklig



Satz von der Winkelhalbierenden 1&2

Satz 1

Wenn P auf w_α liegt,
dann hat P zu den Schenkeln des Winkels α den gleichen Abstand.

Satz 2

Wenn P zu den Schenkeln des Winkels α gleichen Abstand hat,
dann liegt P auf w_α.

Sätze vom Inkreis

Satz 1

Wenn U der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden der Winkel eines Dreiecks ist,
dann hat U zu jeder Seite des Dreiecks den gleichen Abstand.

Satz 2

In einem Dreieck schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in einem Punkt.

Vorgehen analog zum Umkreis;
zusätzliche Schwierigkeit: Ermittlung des Inkreis-Radius‘

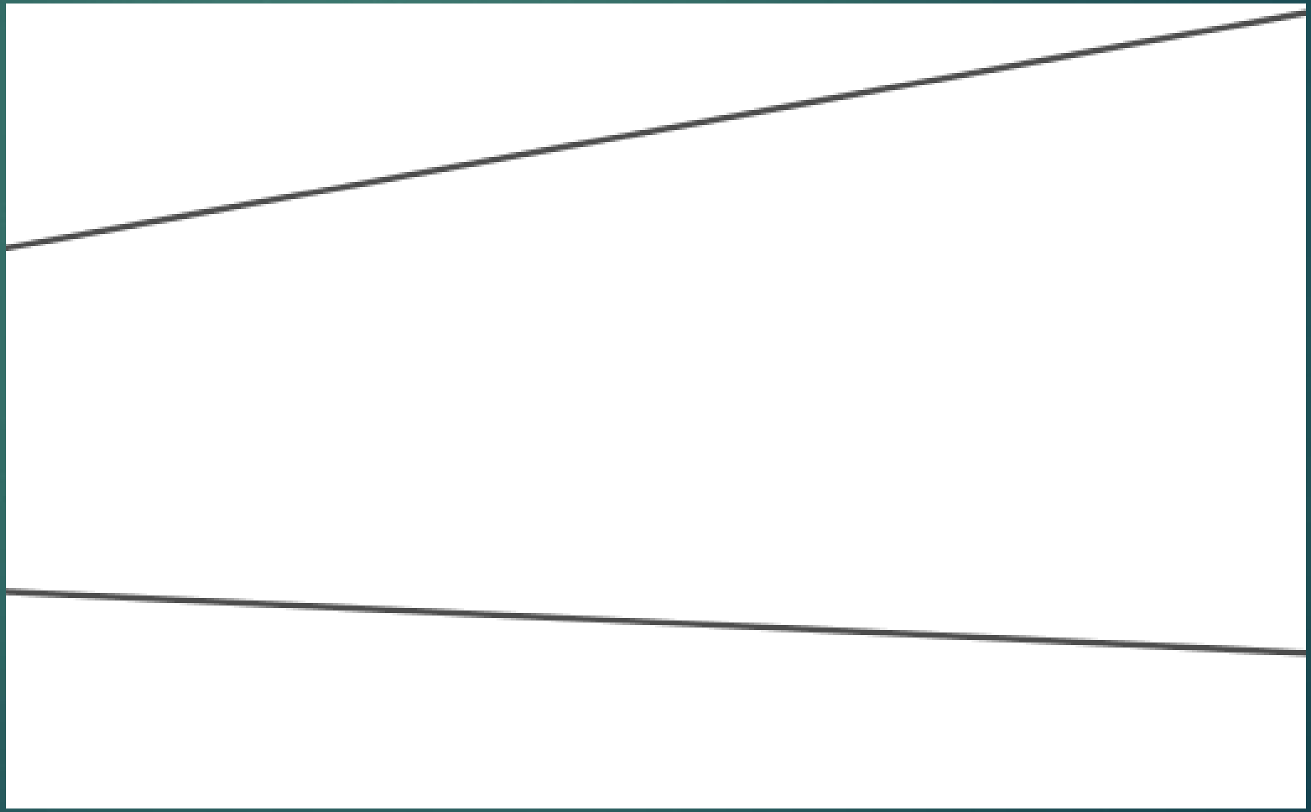
Mein Wunsch…

(Angehende) gymnasiale Mathematik-Lehrkräfte sollten…

- … immer nach dem „Warum?“ fragen.
- … Freude daran haben, das „Warum?“ zu beantworten.
- … in mathematischer Arbeitsweise firm werden.
- … Sachverhalte gründlich analysieren.
- … Vor- und Nachteile einzelner Zugänge erörtern und bewerten.
- … den fachlich zentralen Kern identifizieren und dadurch stimmig didaktisch reduzieren.
- … fachlich souverän sein!!
  Mathematikunterricht hat noch genügend andere Klippen!!

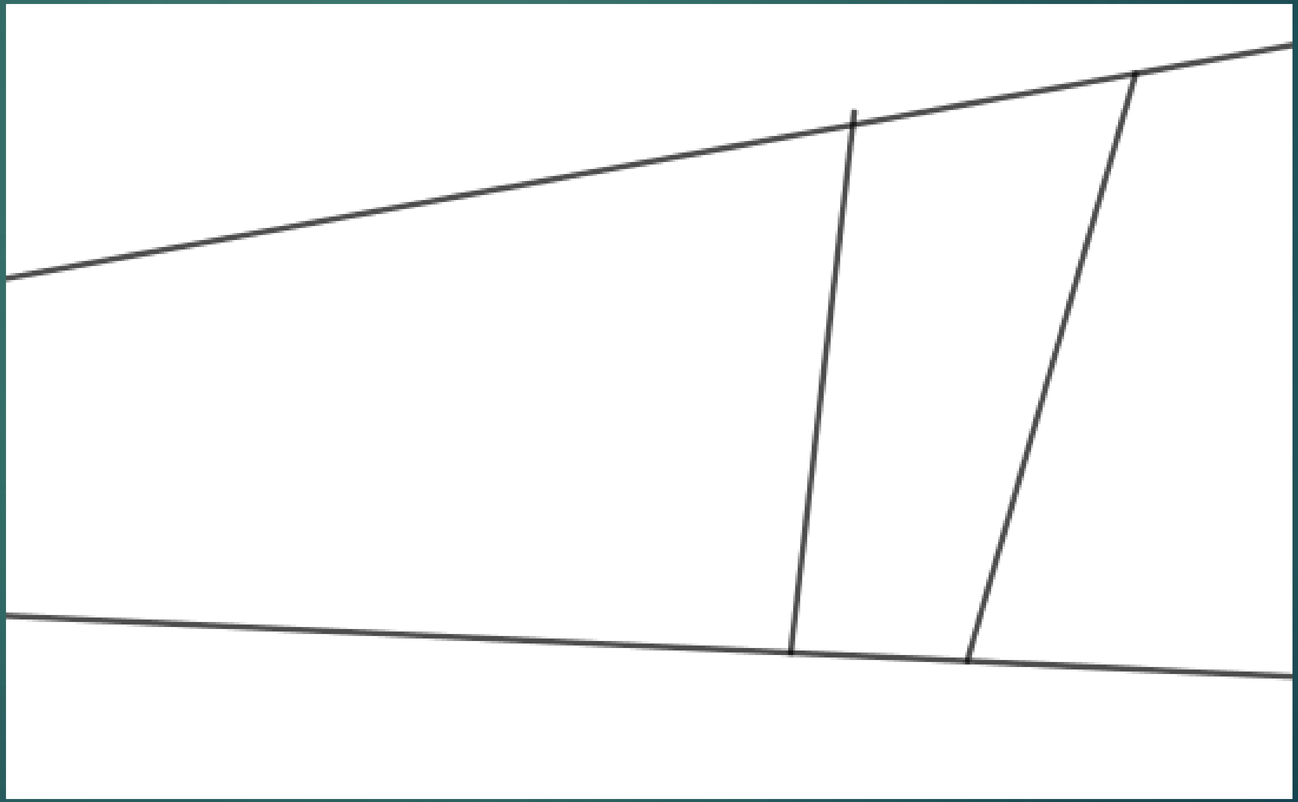
Problemlösen mit MS, WH & Co.

Gesucht:
Winkelhalbierende



Problemlösen mit MS, WH & Co.

Gesucht: Winkelhalbierende



Hilfsmittel beim Konstruieren

- Geodreieck
  - Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende dürfen bei umfangreicheren Konstruktionen auch mit Geodreieck gezeichnet werden
- Digitale Hilfsmittel
  - Dynamische Geometrie-Software, z.B. GeoGebra
  - bietet Konstruktionselemente wie „Mittelsenkrechte“ …

Hilfsmittel beim Konstruieren

- Prinzip
  - erst muss das händische Konstruieren beherrscht werden,

  dann darf die Arbeit durch Hilfsmittel „erleichtert“ werden

Einsatz digitaler Hilfsmittel

- digitale Hilfsmittel nicht zum Selbstzweck einsetzen
- Einsatz des digitalen Hilfsmittels muss dem Lernziel dienen
- fruchtbares Nebeneinanderher von digital und händisch

Einsatz digitaler Hilfsmittel

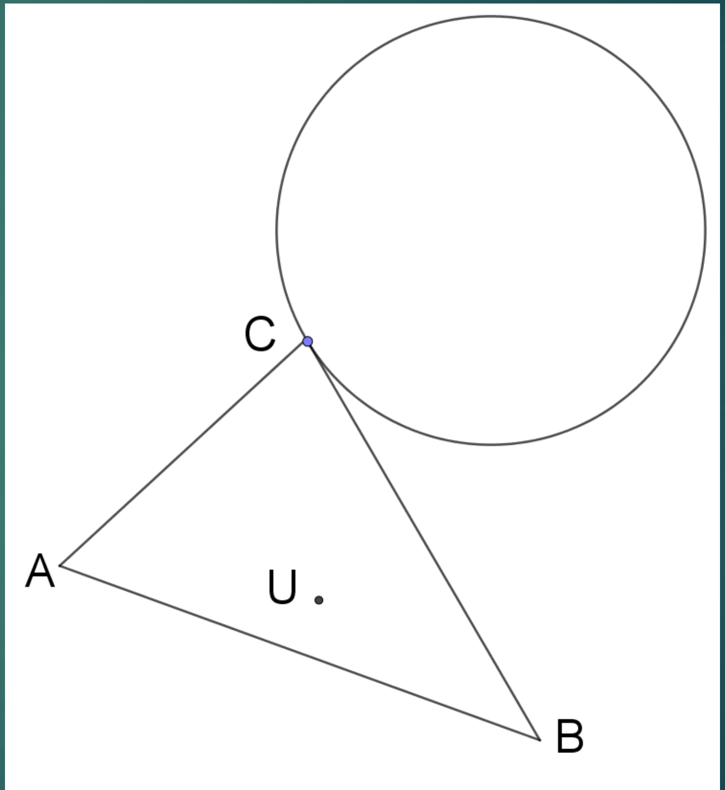
- Grenzen:
  - Verstehensprozesse
  - konstruktive, individuelle Unterstützung im Lernprozess

- Potential:
  - Einsatz digitaler Hilfsmittel kann motivierend sein
  - ermöglicht Differenzierung (Angebot von Hilfen)
  - kann selbständiges Arbeiten fördern
  - bietet Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen, zum Gewinnen von Vermutungen

Problemlösen und Einsatz digitaler Hilfsmittel

Gegeben ist ein Dreieck ABC.
Die Seite AB ist fest, der Punkt C bewegt sich auf einer Kreislinie.

Beschreibe und begründe, wie sich die Lage des Umkreismittelpunktes ändert.



Problemlösen und Einsatz digitaler Hilfsmittel

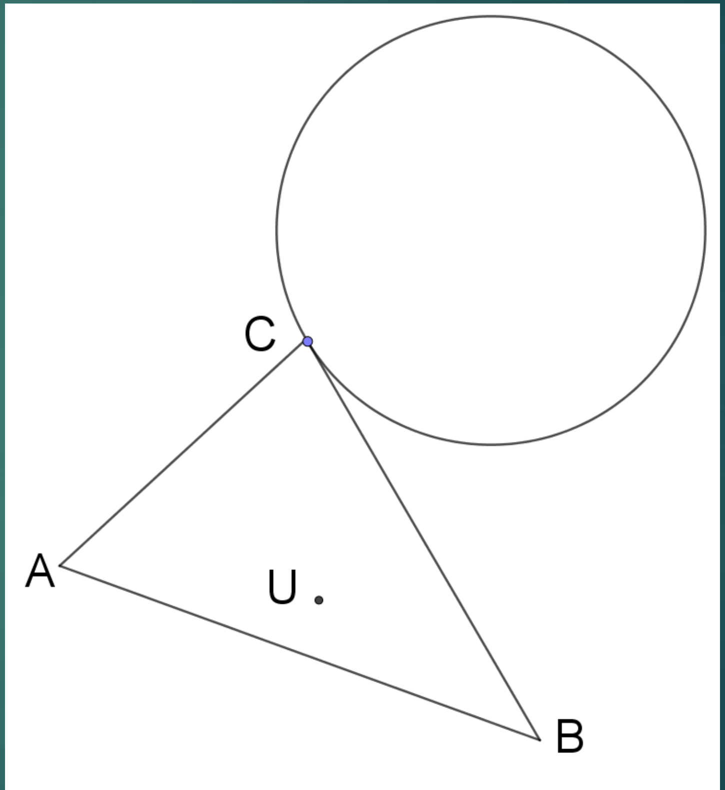
Wege zur Lösung

Stufe 1: Lösung rein gedanklich

Stufe 2: eine (oder wenige) weitere Situation(en) betrachten, Idee entwickeln, begründen

Stufe 3: digital unterstützt „alle“ möglichen Situationen betrachten, Vermutung gewinnen, begründen

Stufe 4: digital weitere Unterstützungen „hinzuschalten“; Ursache beobachten, formulieren



Besten Dank für Ihr Zuhören und Mitdenken!

rebecca.roy@zsl-rstue.de

Besten Dank für Ihr Zuhören und Mitdenken!

Ihnen allen eine entspannende, kommunikative Kaffeepause!!

rebecca.roy@zsl-rstue.de

(Alle Grafiken wurden selbst mit GeoGebra erstellt.)

rebecca.roy@zsl-rstue.de