Ein Plädoyer für Diskrete Analysis

Michael Schmitz

12. Februar 2022

1. Karlsruher Didaktik-Workshop
Einblicke in die moderne Stoffdidaktik

Überblick

Diskrete Analysis: Einführung

- „Jeder" weiß, wie man ein Integral mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung löst, z.B.

$$\int_0^a x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

- Weniger verbreitet ist das „Lösen" einer Summe mithilfe des Hauptsatzes der Differenzenrechnung, z.B.

$$\sum_{x=1}^{n} x(x-1) = \sum_{x=1}^{n} x^{\underline{2}} = \left[\frac{x^{\underline{3}}}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

- *Diskrete Analysis* (oder *Differenzenrechnung*) ist nützlich, gut zugänglich und didaktisch wertvoll!

Motivation

- Viele Lernende kennen und schätzen den Trick des jungen Gauß

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 \end{array},$$

  um $\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$ einzusehen.
- Können wir ähnliche Formeln für andere Summen, wie z.B. $\sum_{x=1}^{n} x^2$, ähnlich einfach herleiten?
- Eine Möglichkeit: Formeln raten und (z.B. per Induktion) beweisen.
- Die Differenzenrechnung liefert uns eine einfache Möglichkeit, geschlossene Formeln für viele Summen wirklich herzuleiten.

Die entscheidende Beobachtung

- Formeln für teleskopierende Summen sind besonders leicht einzusehen, z.B.

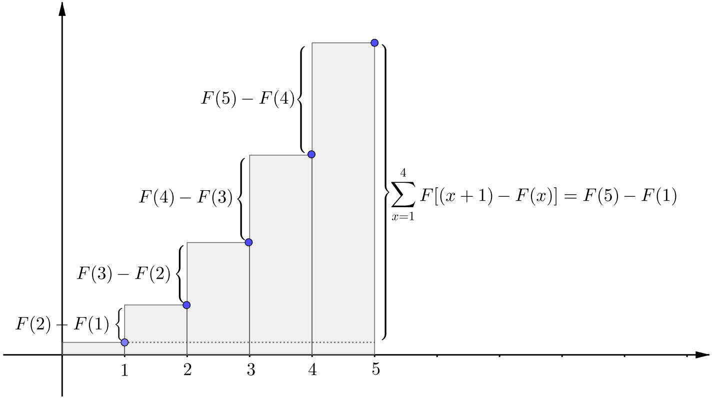
$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) &= \sum_{x=1}^{n} [\ln(x+1) - \ln(x)] \\ &= \sum_{x=1}^{n} \ln(x+1) - \sum_{x=1}^{n} \ln(x) \\ &= \sum_{x=2}^{n+1} \ln(x) - \sum_{x=1}^{n} \ln(x) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).\end{aligned}$$

- Summen teleskopieren stets, wenn ihre Summanden von der Form $F(x+1) - F(x)$ sind. Es gilt

$$\sum_{x=a}^{b} [F(x+1) - F(x)] = F(b+1) - F(a).$$

Veranschaulichung

Die zentrale Formel $\sum_{x=a}^{b} [F(x+1) - F(x)] = F(b+1) - F(a)$ lässt sich gut interpretieren und veranschaulichen.



Der Hauptsatz

- Wir definieren den **Differenz-Operator** Δ durch

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x).$$

- z.B.: $\Delta(x) = (x+1) - x = 1$, $\Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$
- Man beachte

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{mit } h = 1.$$

- Folgenden Satz haben wir jetzt bereits bewiesen!

Satz (Hauptsatz der Differenzenrechnung)

Es seien $F, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $\Delta F = f$. Dann gilt

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = F(b+1) - F(a) =: [F(x)]_a^{b+1},$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen a, b mit $a \leqslant b$.

Anwendung des Hauptsatzes

- Wir beobachten

$$\Delta(x) = 1, \quad \Delta[x(x-1)] = 2x, \quad \Delta[x(x-1)(x-2)] = 3x(x-1),$$

- und definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$x^{\underline{k}} := \underbrace{x(x-1)\cdots(x-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} \qquad \text{('}x \text{ hoch } k \text{ fallend').}$$

- Dann gilt $\Delta(x^{\underline{k}}) = kx^{\underline{k-1}}$, bzw. $\Delta\left(\frac{x^{\underline{k}}}{k}\right) = x^{\underline{k-1}}$. $\qquad (x^{\underline{0}} := 1)$
- Nun können wir den HS auf viele Summen anwenden, z.B.

$$\sum_{x=1}^{n} x = \left[\frac{x^{\underline{2}}}{2}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{(n+1)n}{2}, \text{ oder}$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \sum_{x=1}^{n} \left(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\right) = \left[\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right]_1^{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Weitere Anwendungen des Hauptsatzes

- Man findet heraus: $x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$
  - Interessanter allgemeiner Zusammenhang: $x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$, wobei wir mit $\left\{ {n \atop k} \right\}$ die Stirling-Zahlen zweiter Art notieren.
- Nun erhalten wir mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n} x^3 &= \sum_{x=1}^{n} \left(x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \right) \\ &= \left[\frac{x^{\underline{4}}}{4} + x^{\underline{3}} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} \right]_1^{n+1} = \ldots = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

- Noch ein Bsp.: $\Delta(2^x) = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$, also erhalten wir mit HS

$$\sum_{x=0}^{n} 2^x = [2^x]_0^{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

Ausblick

- **Geometrische Summenformel**
  - $\Delta(q^x) = q^{x+1} - q^x = q^x(q-1)$, also $\Delta\left(\frac{q^x}{q-1}\right) = q^x$
  - Mit HS folgt:
$$\sum_{x=0}^{n} q^x = \left[\frac{q^x}{q-1}\right]_0^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$
- **Weitere Analogien zur reellen Analysis**
  - Produktregel:
$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$
  - Partielle Summation:
$$\sum_{x=a}^{b} g(x)\Delta f(x) = [f(x)g(x)]_a^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} f(x+1)\Delta g(x).$$

Didaktische Diskussion

Zugänge zur reellen Analysis in der Schule

- heute über intuitiven Grenzwertbegriff (vgl. Weigand, 2014)
- **Vorteil:** Zügiges Vordringen zu Anwendungen
- **Kritik:** Grundlegende Konzepte bleiben unverstanden, SuS werden nicht gut auf Analysis-Kurse an der Universität vorbereitet (vgl. Weigand, 2014)
  - **Gefahr:** Kalküle (z.B. Ableitungsregeln) können angewendet werden aber zugrundeliegende Konzepte (z.B. Grenzwertbegriff) wurden nicht verstanden.
- **Plausible Forderung:** Grenzwerte in der Schule präzise behandeln!
- **Allerdings:** Dies wurde in der Vergangenheit bereits versucht und ignoriert die historische Genese („Darbietung eines Endprodukts"). (vgl. Weigand, 2014).

Historischer Exkurs (vgl. Volkert, 1988)

- vor Newton und Leibniz: Cavalieri, Toricelli u.a.
- Arbeiten von Newton und Leibniz ($\sim$ 1670)
- Gauß mied Methoden der Analysis (um 1800)
- Cauchy: *Résumé* (1823) und *Lecons* (1829)
- Dini: *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe* (1878)
- Meraner Konferenz (1905)

„[...] zahlreiche Mathematiker, unter ihnen Rolle, haben sie ganz verworfen, weil es ihnen unmöglich war, die Annahmen über die unendlichkleinen Größen zu akzeptieren. Sie behaupten, sie sei im Prinzip falsch und führe zu Fehlern. Dennoch können wir [...] nur schließen, daß die Prinzipien, auf denen die Differentialrechnung beruht, einfach und gewiß sein müssen. Denn dieser Kalkül liefert zuverlässige, einfache und exakte Methoden.“

(d'Alembert, 1754)

Diskrete Analysis als eigenständiges Themengebiet

- Verschiedene Vorschläge für diskrete Zugänge zur Analysis liegen vor: Gordon (1979), Wittmann (1980), Leuders (2010), Weigand (2014).
- **Ansatz**: anspruchsvollen Grenzwertbegriff zunächst ausblenden; im weiteren Verlauf den Übergang zur reellen Analysis vollziehen.
- **Vorschlag hier:** Diskrete Analysis als eigenständige Einheit *anstatt* der reellen Analysis behandeln.
- Propädeutischer Nutzen liegt auf der Hand.
- **Behauptung:** Differenzenrechnung für sich besitzt großen didaktischen Wert.

Didaktischer Wert der Differenzenrechnung

- natürliche Motivation: Suche nach geschlossenen Formeln für Summen
- Phänomen des Teleskopierens motiviert Definition von Δ
  - *Beachte:* Integration als Motivation für Differentiation
- keine Grenzwerte: alle Operationen rein algebraisch, alle Ausdrücke endlich, Formeln können durch Einsetzen erprobt werden
- zentrale Beweise können durch bloße Termumformungen erbracht werden $\Rightarrow$ Lernende können Theorie eigenständig mitentwickeln
- viele Gelegenheiten, den *zielgerichteten* Umgang mit Termen auf verschiedenen Niveaus zu thematisieren, z.B.

$$\Delta(x^{\underline{3}}) = (x+1)^{\underline{3}} - x^{\underline{3}} = (x+1)x(x-1) - x(x-1)(x-2) = \ldots$$

- Hürde/Chance: Umgang mit dem Summenzeichen
- natürlicher Kontakt mit Folgen, Reihen, diskreter Mathematik

Zwischenfazit

Für die Behandlung der diskreten Analysis anstelle der reellen Analysis in der Oberstufe sprechen folgende Punkte:

1. Zugang über einen intuitiven Grenzwertbegriff und formaler Zugang zur reellen Analysis bergen große didaktische Schwierigkeiten.
2. mathematikdidaktischer Wert der Differential- und Integralrechnung im ungünstigsten Fall gering (wenn nur unverstandenes Kalkül)
3. auf hohes propädeutisches Potenzial der Differenzenrechnung könnte bei späterer Behandlung der reellen Analysis zurückgegriffen werden (Bezug zur historischen Genese)
4. mathematikdidaktischer Wert und ausreichender Anspruch der Differenzenrechnung an sich
5. Stärkung der diskreten Mathematik im Schulcurriculum

Reflexion

- Forderung nach Streichung der Analysis zugunsten der Differenzenrechnung **nicht** realistisch
- Gedankenspiel / Provokation, um auf generellen Aspekt hinzuweisen
- Würde das Ersetzen von Analysis durch Differenzenrechnung zu einem (weiteren) Abfall des Niveaus führen? Denn: Differenzenrechnung ist elementarer als Analysis.
- Aber: Genau dieses Niveau wäre wichtig für den Aufbau mathematischer Kompetenzen
- Anspruchsvolles Buchstabenrechnen wird in der Schule „bewältigt“, Einfaches und Grundsätzliches bleibt oft unverstanden. (vgl. Malle, 1993)
- vgl. hierzu auch: Vollrath/Weigand (2007); PISA, TIMSS
- *„Wir sollten möglichst viele Probleme in den mathematischen Unterricht hineinbringen, die ein Maximum an mathematischem Gehalt mit einem Minimum an vorausgesetzter Routine [...] verbinden.“* (Wagenschein, 1970, S. 139)

Beispiele von Günther Malle

Was bei Studenten beobachtet wurde	Was in der Schule geübt wird
$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{3}$	Vereinfache: $\left(\frac{2}{3x-y} - \frac{1}{2x}\right) : \frac{x+y}{6x-2y}$
$\frac{s_{12}'}{s_{12}} = \frac{r}{h} \Longrightarrow s_{12}' = \frac{r}{h} - s_{12}$	Löse: $\frac{x+1}{x^2+x-6} + \frac{x-9}{x^2+3x-10} + \frac{x+9}{3x^2-7x+2} = 0$
$h_n^2 = 1 - \frac{s_n^2}{4} \Longrightarrow h_n = 1 - \frac{s_n}{2}$	Löse: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-11} = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-4}$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \Longrightarrow \frac{\sigma}{n} = \sqrt{p \cdot (1-p)}$	$\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^2 : \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt[3]{q}}\right] \cdot \sqrt[4]{6^2} = \ldots$
$\frac{1}{a} - \varepsilon < x < \frac{1}{a} + \varepsilon \Longrightarrow a - \frac{1}{\varepsilon} > x > a + \frac{1}{\varepsilon}$	Löse: $5(\frac{1}{4}x + 7) - 3(\frac{1}{5}x - 2) > 9(\frac{1}{10}x - 5) + 91$

Fazit

*Ein scheinbar höheres Niveau (vor allem im Bereich der eher technisch geprägten Mathematik) kann dazu führen, dass Schüler*innen sich durch reine Adaption und ohne Verständnis Kalküle aneignen, die sie daraufhin für einen kurzen Zeitraum in genau eintrainierten Situationen anwenden können. Jede Abweichung von der gewohnten Situation führt dann zum Totalausfall. Wir sollten mehr Mut haben, elementarere Inhalte ernst zu nehmen und in das Schulcurriculum aufzunehmen. Dadurch würde der Mathematikunterricht anspruchsvoller.*

- Behandlung der Differenzenrechnung wäre *eine* Möglichkeit dieser Forderung nachzukommen.
- Momentan fristet sie ein Schattendasein.

Quellen

- **Gordon, S. P.** A discrete approach to the calculus. Int. J. Math. Educ. in Science and Technology, 10:1, 21-31 (1979)
- **Leuders, T.** Veränderungen verstehen – aus diskreter Sicht. PM Prax. Math. Sch. 52, No. 31, 9-13 (2010).
- **Malle, G.** Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1993)
- **Schmitz, M.** A Plea for Finite Calculus, The College Mathematics Journal, 52:2, 94-105 (2021)
- **Volkert, K.** Geschichte der Analysis. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1988)
- **Vollrath, H.; Weigand, H.** Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, München (2007)
- **Wagenschein, M.** Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2. In: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, 2. Auflage, Ernst Klett Verlag, Stuttgart (1970)
- **Weigand, H. G.** A discrete approach to the concept of derivative. ZDM, Int. J. Math. Educ. 46, No. 4, 603-619 (2014)
- **Wittmann, E.** 'Discrete analysis' - an approach to fundamental ideas of analysis. Educ. Stud. Math. 11(4) p. 383-392, (1980)