## Workshop 2 – Einsatz des GTR in der gymnasialen Oberstufe

Dieser Workshop wird sich schwerpunktmäßig mit der linearen Regression befassen. Dieses Thema bietet sich aus mehrfacher Sicht für diesen Workshop an.

Zum einen ergibt sich zwanglos die Möglichkeit, die grafischen und numerischen Fähigkeiten des GTR Gewinn bringend einzusetzen. Insbesondere kann man

- den List-Plot verwenden, um Messwerte grafisch darzustellen,
- den Funktioneneditor zum Zeichnen der Regressionskurven einsetzen,
- die statistischen Funktionen unter STAT-EDIT verwenden, um die Messwerte numerisch auszuwerten,
- die Fähigkeit zum Lösen eines LGS verwenden, um die Parameter der Regressionsfunktion zu bestimmen

Zum zweiten besitzt die Regression in den Naturwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften eine viel größere Bedeutung als sie derzeit in der Schulmathematik eingeräumt bekommt. Aber gerade die lineare Regression lässt sich gut in die Unterrichtseinheit „Extremwertaufgaben“ eingliedern. Dies soll in diesem Workshop beleuchtet werden.

Als drittes Argument, diese Regressionskurven im Unterricht zu thematisieren, stellt die Tatsache dar, dass diese Möglichkeiten der Regressionsbestimmung mithilfe des Rechners meist nur in Form einer „Black box“ eingesetzt wird; die Schüler erfahren, dass mit dieser Funktion eine bestmögliche Anpassung an eine Menge von Messpunkten möglich ist, erleben jedoch nicht, welche Eigenschaften dieser Anpassung zugrunde liegen und wie man auf diese „optimale“ Gerade kommt. Daher erscheint es durchaus sinnvoll, die Entwicklung einer solchen Regressionskurve zu vermitteln.

Dass die für die Erarbeitung erforderlichen Umformungen allerdings für Schüler sehr schwierig sind (Summationen, viele Symbole), ist ebenfalls offensichtlich. Hier muss ein Kompromiss zwischen der „Black box“ und der umfassenden Herleitung gefunden werden.

Daher wird in diesem Workshop ein Weg vorgeschlagen, mit dem die Regressionsgerade bestimmt werden kann, dies gleichzeitig aber auch mit Schülerkenntnissen nachvollzogen werden kann. Es wird hier nicht Wert auf eine vollständige und allgemeine Herleitung dieser Regressionsformeln gelegt, sondern auf das grundlegende Verständnis der Eigenschaften einer solchen optimalen Geraden.

Aus diesem Grund wird bei der Bearbeitung stets exemplarisch vorgegangen: Anhand konkreter Messwerte wird die für diesen Fall optimale Gerade bestimmt. Mit den CAS- Rechnern kann gegenüber den GTR- Rechnern natürlich noch ein weiterer Abstraktionsschritt eingeschlagen werden, da symbolische Umformungen des CAS- Rechners die diesbezügliche Arbeit deutlich erleichtern. Ob der Fachlehrer diesen Schritt der allgemeinen Herleitung im Unterricht realisiert, ist seiner Entscheidung überlassen.

Weiterhin soll im Unterricht den Schülern möglichst viel Raum für eigene Experimente und Entdeckungen gegeben werden, weil dadurch das Erlernte stärker verankert werden kann. Das experimentelle Arbeiten mit den Rechnern steht somit ebenfalls im Vordergrund dieser Unterrichtseinheit. Hierbei kommt sowohl die Tabellenkalkulation (mit Excel) als auch der GTR bzw. das CAS zum Einsatz.

Im Sinne einer Stufung der Schwierigkeiten wird zunächst eine durch den Ursprung gehende optimale Gerade gesucht. Die hierzu erforderlichen Umformungen können mit Kenntnissen der Differenzialrechnung einer Variablen auch von den Schülern von Hand (bei ausreichend wenigen konkreten Messpunkten) durchgeführt werden.

Die Notwendigkeit partieller Ableitungen, die vom Lehrer zu gegebener Zeit jedoch geschickt veranschaulicht werden können, entsteht erst bei der Verallgemeinerung auf beliebige Geraden. Hier wird die Tabellenkalkulation ebenfalls eine geeignete Visualisierung bereitstellen.

Den zweiten Teil dieses Workshop-Teils sollen einige Aufgabenbeispiele zur Regression bzw. zu anderen für den GTR geeigneten Themen bieten, die dann von den Teilnehmern selbständig bearbeitet werden. Hierzu sind diesem Tagungsband einige Tipps zum GTR sowie Aufgabenbeispiele beigefügt.

# Tipps und Tricks mit dem GTR[1]

## 1 Zurücksetzen des GTR

Oft ist es hilfreich, den GTR in den Ausgangszustand zu versetzen und alle Variableninhalte, Funktionsdefinitionen und Listeninhalte zu löschen. Hierzu gibt man ein:

[MEM] <Reset> <RAM – All RAM> <Reset>

## 2 Wichtige und hilfreiche Tasten (entry ans catalog Speichervariablen)

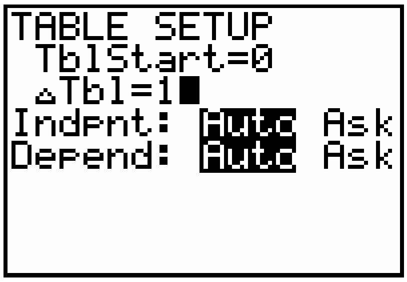
Mit der Taste [ENTRY] kann man die letzten Eingaben wieder in die Anzeige holen und damit einen Befehl auch mehrmals – ggf. abgewandelt – wieder verwenden, ohne die Eingaben erneut durchführen zu müssen.

Mit der Taste [ANS] kann man die letzte Antwort des Rechners in die Anzeige bringen und diese in eigenen Befehlssequenzen benutzen.

Mit der [ALPHA]-Taste schaltet man auf die grünen Tastenbezeichnungen um; insbesondere kann man damit die Speichervariablen A bis Z ansprechen, in denen Zwischenwerte gespeichert werden können.

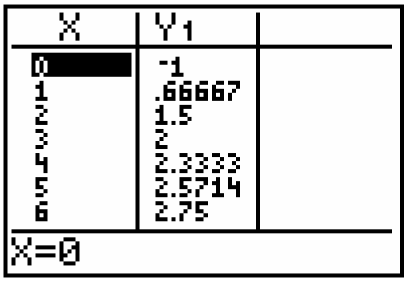
Mit dem Befehl [CATALOG] kann man ein alphabetisches Verzeichnis der Befehle abrufen. Wenn man dabei anschließend den Anfangsbuchstaben des gewünschten Befehls eingibt, dann spart man sich das lästige Durchblättern bis zu diesem Befehl – der Rechner springt gleich zum ersten Befehl mit dem gewünschten Anfangsbuchstaben.

Will man den letzten Befehl wiederholen, genügt übrigens auch die Betätigung der [ENTER]-Taste.




## 3 Erstellen einer Wertetabelle

Drücken Sie – ausgehend von dem vorhergehenden Tipp – die Taste [TABLE]. Dann wird die Wertetabelle zu den im Y-Editor gespeicherten Funktionen gezeigt. Die Auswahl der gewünschten x-Werte gelingt mit der [TBLSET]-Taste – dort kann man Startwert und Schrittweite für die Wertetabelle angeben:



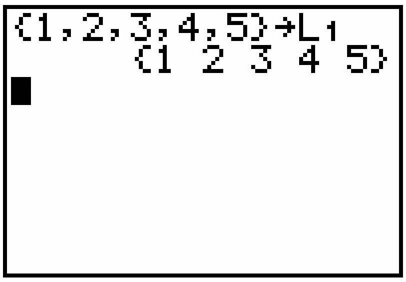

## 4 Zeichnen von Kurvenscharen

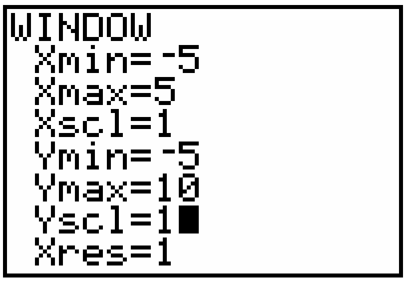
Zeichnen Sie die Schaubilder von $f_1$, $f_2$, ... $f_5$ für $f_t(x)=\frac{t}{5}x^2-t$ .

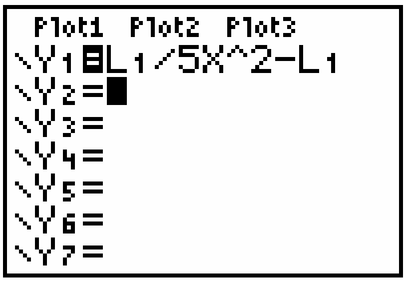
Im Hauptbildschirm eingeben:

[{] 1 [,] 2 [,] 3 [,] 4 [,] 5 [}] [STO▸] [L1] [ENTER]

[Y=] [L1] / 5 X ^ 2 [−] [L1] [ENTER]




[1] Die Tipps und Tricks 1 bis 16 stellen einen Auszug aus „Analysis Wahlteil“, Stark -Verlag Nr. 84002, dar

## 5 Zeichnen der Ableitungsfunktion

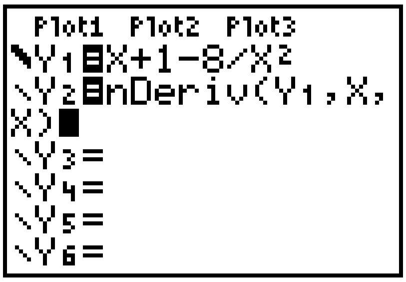
Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x + 1 - \frac{8}{x^2}$ sowie deren Ableitungsfunktion.

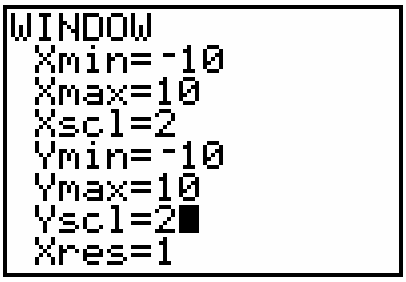
Eingabe der Funktion in den Funktioneneditor unter Y1 ein. Außerdem Eintragung des Ableitungsoperators [nDeriv(] (aus dem [MATH]-Menü) für die Funktion Y1 bei Y2.

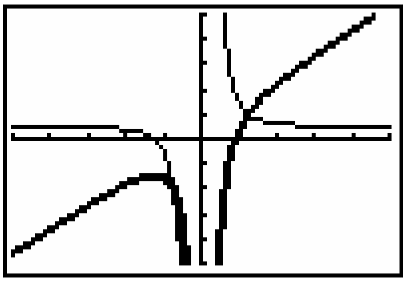
[MATH] <nDeriv(> [VARS] <Y-VARS – Function - Y1> [ ) ]

Zur Unterscheidung der Schaubilder kann man das Schaubild von f noch auf „dicke Linie“ einstellen:

Man bewegt hierzu den Cursor auf das \ - Zeichen links neben der Y1-Anzeige und betätigt [ENTER]. Das Zeichen wird jetzt dick angezeigt. Anschließend wird über [WINDOW] der Zeichenbereich eingegeben und die Schaubilder mit [GRAPH] gezeichnet.



## 6 Zeichnen von Messpunkten

Stellen Sie die Punkte A(0|2), B(3|5) und C(7|7) grafisch dar.

Erfassung der drei Punkte im Listeneditor:

[STAT] <EDIT>

in L1 eingeben: - 0 [ENTER] 3 [ENTER] 7 [ENTER] (*Eintragung der x-Werte*)

in L2 eingeben: 2 [ENTER] 5 [ENTER] 7 [ENTER] (*Eintragung der y-Werte*)

Die Punkte werden gezeichnet:

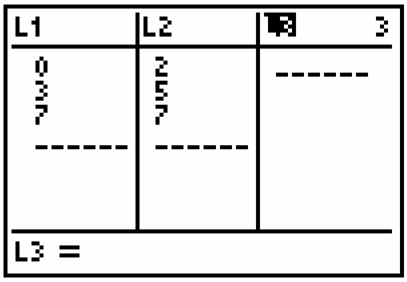
[STAT PLOT] <Plot 1 – on> (*Plot wird eingeschaltet*)

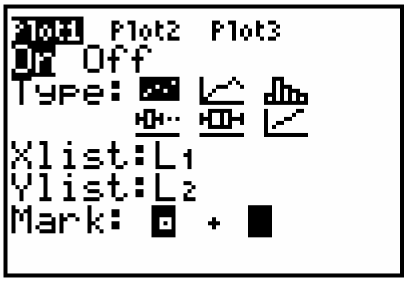
Eingabe der restlichen Informationen wie abgebildet.

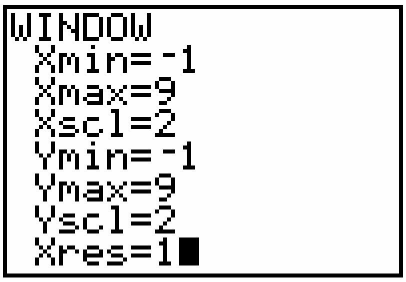
Danach Auswahl des geeigneten Zeichenbereichs im [WINDOW] - Fenster:

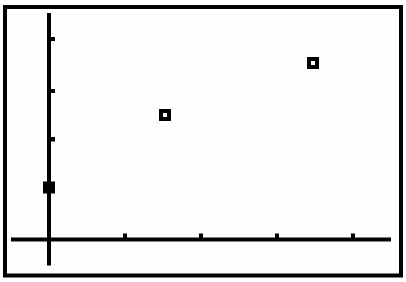
Xmin = - 1 [ENTER] Xmax = 9 [ENTER] Xscl = 2 [ENTER]
Ymin = -1 [ENTER] Ymax = 9 [ENTER] Yscl = 2 [ENTER]

Aufruf des Schaubildfensters mit [GRAPH]:



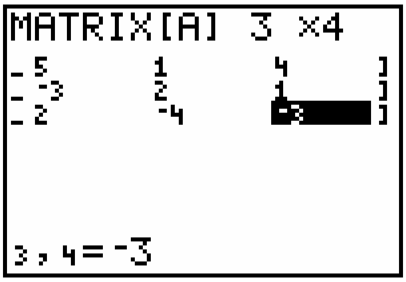
## 7 Lösen eine linearen Gleichungssystems

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems: $\begin{pmatrix} 3a + 5b + c = 4 \\ 2a - 3b + 2c = 1 \\ a + 2b - 4c = -3 \end{pmatrix}$

Eingabe dieses Gleichungssystem in die Matrix A:

[MATRX] <EDIT – A>

Nun erscheint die Aufforderung, die Zeilen- und Spaltenzahl einzugeben.



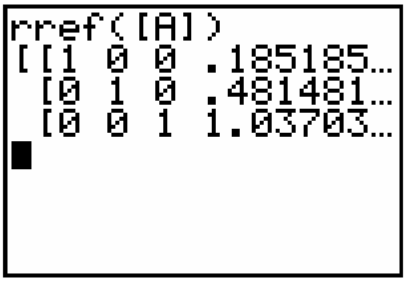

3 [ENTER] 4 [ENTER]

Jetzt werden die Koeffizienten eingetragen:

3 [ENTER] 5 [ENTER] 1 [ENTER] 4 [ENTER]

2 [ENTER] - 3 [ENTER] 2 [ENTER] 1 [ENTER]

1 [ENTER] 2 [ENTER] - 4 [ENTER] - 3 [ENTER]




Verlassen des Matrix-Editors mit [QUIT] und Eingabe im Hauptbildschirm.

[MATRX] <MATH – rref> [MATRX] <NAME – A> [ ) ] [ENTER]

Die Werte in der letzten Spalte stellen die Lösung dar: a=1,85..., b=0,48... und c=1.03....

## 8 Funktionsbestimmung anhand von Punkten

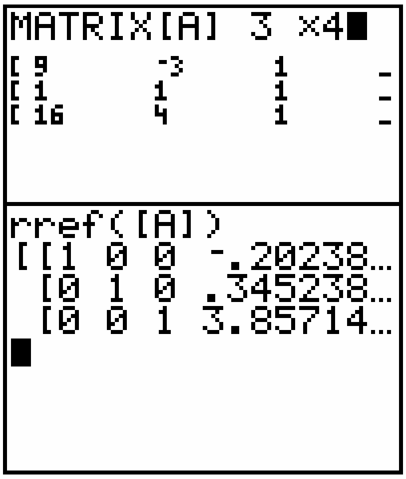
Bestimmen sie die Gleichung der Parabel durch die Punkte A(-3|1), B(1|4) und C(4|2).

weil drei Punkte gegeben sind, ist die Wahl einer Parabel zweiten Grades sinnvoll:

$f(x)=a\,x^2 + b\,x + c$.

Punktprobe mit den drei Punkten liefert wieder ein Gleichungssystem:

$\begin{pmatrix} 9a - 3b + c = 1 \\ a + b + c = 4 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{pmatrix}$, das wie zuvor dargestellt gelöst werden kann




Man erhält also $f(x) \approx -0{,}202\,x^2 + 0{,}345\,x + 3{,}857$

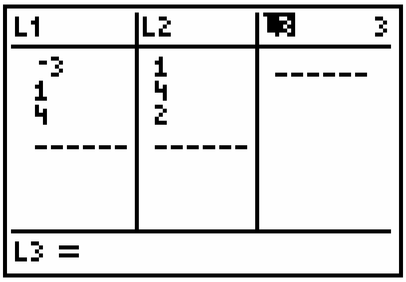
## 9 Funktionsbestimmung anhand von Punkten über Regressionskurven:

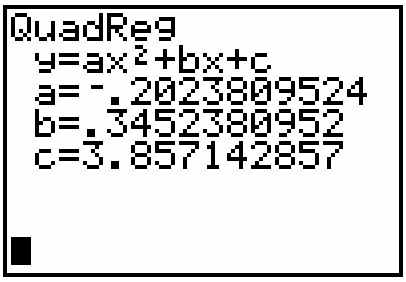
[STAT] <EDIT> (Aufrufen des Listeneditors)

in L1 eingeben: - 3 [ENTER] 1 [ENTER] 4 [ENTER] (*Eintragung der x-Werte*)

in L2 eingeben: 1 [ENTER] 4 [ENTER] 2 [ENTER] [QUIT] (*Eintragung der y-Werte und zum Hauptbildschirm*)

[STAT] <CALC – QuadReg> (*Aufrufen der quadratischen Regression*)




**Merke**: Die Regressionskurve wird immer von L1 und L2 berechnet.

Wenn man andere Listen verwenden möchte, dann muss man diese durch Komma getrennt als Parameter eingeben:

[STAT] <CALC – QuadReg> [L1] [,] [L4] [ENTER]

Wenn möglich, legt der GTR die Kurve genau durch die angegebenen Punkte. Dies ist in der Regel der Fall, wenn für eine ganzrationale Funktion n-ten Grades n+1 Kurvenpunkte gegeben sind und nicht gerade zwei Punkte dieselbe x-Koordinate besitzen.

Wenn mehr Punkte als nötig angegeben werden (oder zwei Punkte dieselbe x-Koordinate besitzen), dann geht die Kurve nicht (unbedingt) durch alle Punkte – oft sogar durch keinen einzigen; Regressionskurven sind dann nur Näherungskurven!

## 10 Regressionskurve

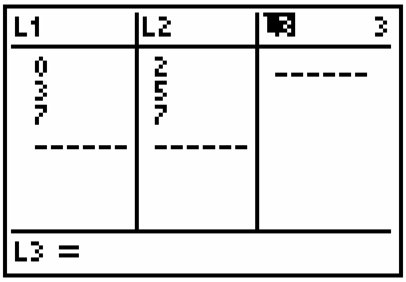
Bestimmen Sie eine Gerade, die möglichst nahe bei den Punkten A(0|2), B(3|5) und C(7|7) verläuft.

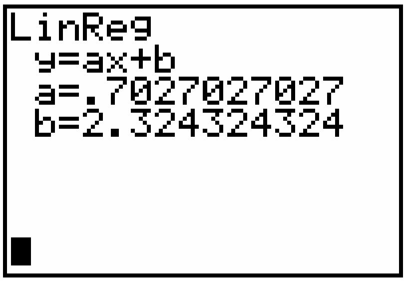
Erfassen der drei Punkte im Listeneditor mit [STAT] <EDIT – Edit>:

in L1 eingeben: - 0 [ENTER] 3 [ENTER] 7 [ENTER] (*Eintragung der x-Werte*)

in L2 eingeben: 2 [ENTER] 5 [ENTER] 7 [ENTER] [QUIT] (*Eintragung der y-Werte und zum Hauptbildschirm*)

[STAT] [CALC] <LinReg(ax+b)> [ENTER] (*Aufrufen der linearen Regression*)



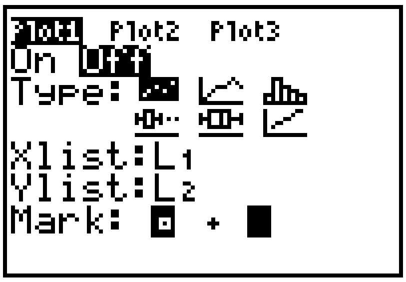

## 11 Zeichnen der Regressionskurve mit Messpunkten

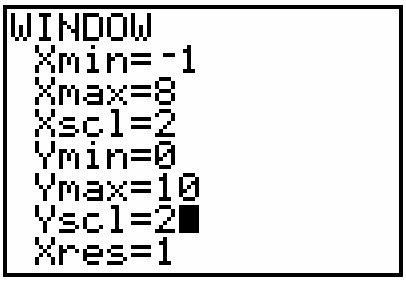
Die Regressionskurve mit den Messpunkten der vorhergehenden Aufgabe ist zu zeichnen.

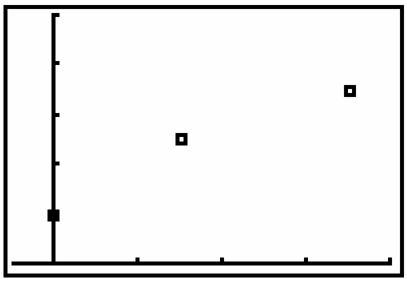
Erfassen der Punkte mit dem Listeneditor wie in der vorhergehenden Aufgabe.

[STAT PLOT] [ENTER] <On> [ENTER] (*Zeichnen der Punkte, sonstige Einstellungen wie im Bild*)

[GRAPH] (*Zeichnen der Punkte*)

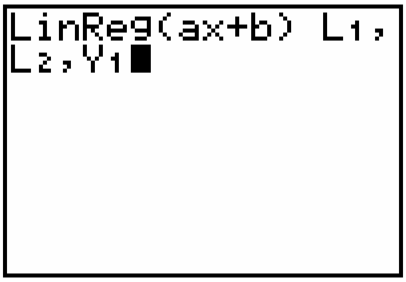


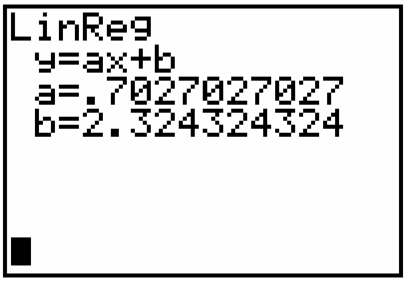



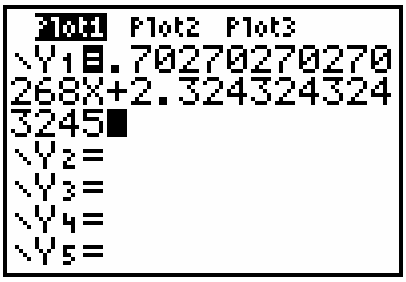
[QUIT] [STAT] [CALC] <LinReg(ax+b)> (*Aufruf der lin. Regression*)

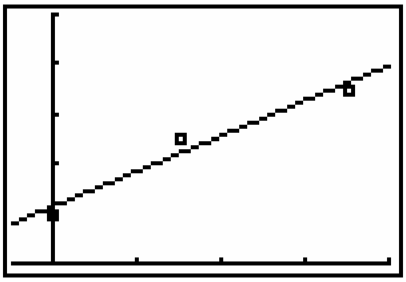
[L1] [,] [L2] [,] [VARS] <Y-VARS – Y1> [ENTER] (*Berechnen der Regressionsgeraden*)




Durch die drei Argumente L1, L2 und Y1 wird die Regressionsgerade bestimmt und sofort in Y1 abgespeichert, so dass man jetzt wieder das Grafikfenster mit [GRAPH] aufrufen kann und Messpunkte und Regressionsgerade gemeinsam sieht.



## 12 Erstellen und Zeichnen von Folgen

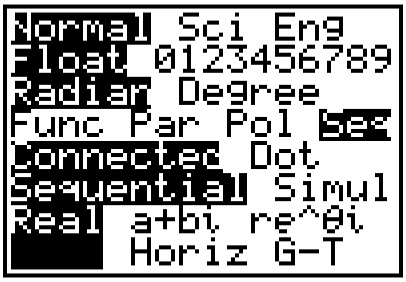
Stellen Sie die Folge $(a_n)$ ; $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = n^2-3$ dar.

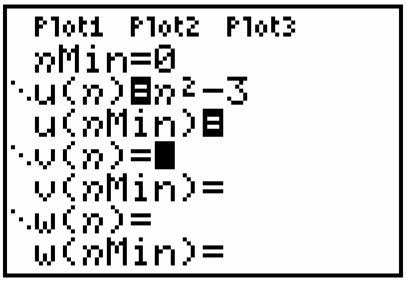
Umschaltung auf Folgendarstellung und Eingabe der Folge:

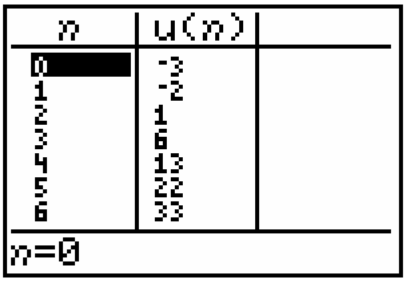
[MODE] in der vierten Zeile auf Seq (Folge) einstellen [ENTER]

[Y=] nMin=0 u(n)= X ^2 – 3 u(nMin)= [ENTER] ( u(nMin) sollte leer bleiben )

Darstellen der Folge mit [TABLE] - Zeichnen der Folge mit [GRAPH]



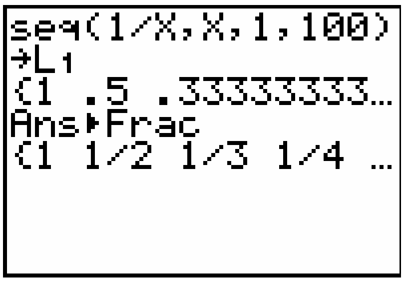

## 13 Direkte Definition einer endlichen Folge – Ausgabe von Brüchen

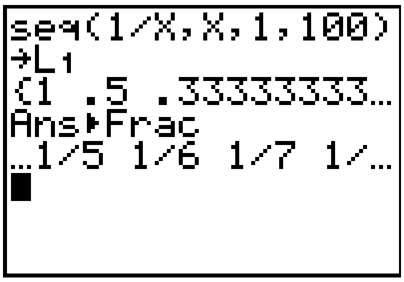
Speichern Sie die Folge $(a_n)$ mit $a_n=\frac{1}{n}$ mit $1 \le n \le 100$ in der Liste $L_1$ ab.

Eingabe im Hauptbildschirm:

[LIST] <OPS – seq> 1 / X [,] X [,] 1 [,] 100 ) [STO▸] [L1] [ENTER]

Die Umwandlung in Brüche wird durch anschließende Eingabe von [MATH] <▸Frac> realisiert.
Blättern in der Folge ist mittels [▸] und [◂] möglich.



## 14 Erstellen und Zeichnen von rekursiv definierten Folgen

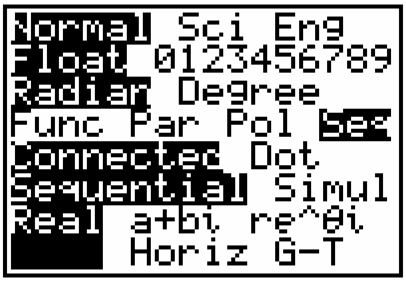
Stellen Sie die Folge $(a_n)$ ; $n \in IN$ mit $a_n = a_{n-1}+2n-1$ und $a_0=0$ dar.

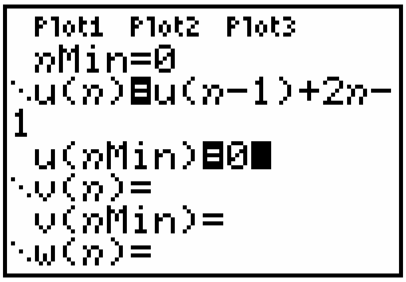
Umschaltung auf Folgendarstellung und Eingabe der Folge:

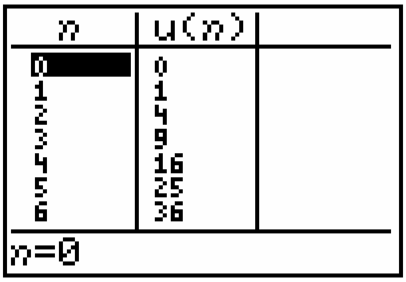
[MODE] in der vierten Zeile auf Seq (Folge) einstellen [ENTER]

[Y=] nMin=0 u(n)= [u] ( X – 1 ) + 2 X– 1 u(nMin)=0 [ENTER]

Darstellen der Folge mit [TABLE] - Zeichnen der Folge mit [GRAPH]




## 15 Summe von Folgengliedern

Bestimmen Sie die Summe der Quadratzahlen von $1^2$ bis $100^2$.

Die Folge der Quadratzahlen wird in der Liste L1espeichert:

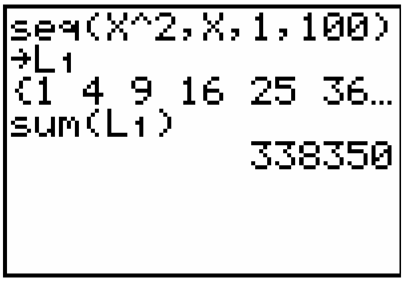
[LIST] <OPS – seq> X ^ 2 [,] X [,] 1 [,] 100 ) [STO▸] [L1] [ENTER]

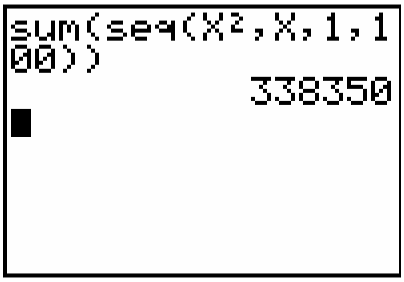
Anschließend wird die Summe der Listenelemente gebildet:

[LIST] <MATH – sum> [L1] ) [ENTER]

**Alternativ** kann man auch die beiden Befehlszeilen zu einem einzigen Befehl verschachteln:

[LIST] <MATH – sum> ) [LIST] <OPS – seq> X ^ 2 [,] X [,] 1 [,] 100 ) ) [ENTER]




## 16 Mini-Tabellenkalkulation mit dem GTR

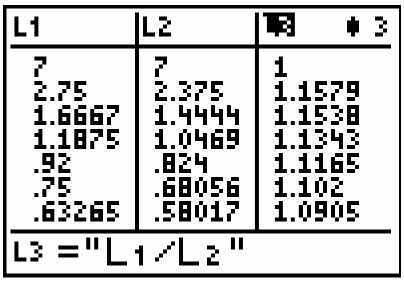
Gegeben seien die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ durch $a_n = \frac{4n+3}{n^2}$ bzw. $b_n = \frac{4n^2+3}{n^3}$. Bestimmen Sie die ersten Glieder der Folge $(c_n)$ mit $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Sie können den Listeneditor bequem als Mini-Tabellenkalkulationsprogramm verwenden.

Speichern Sie die ersten Folgeglieder der Folge $(a_n)$ in L1 und die ersten Folgeglieder der Folge $(b_n)$ in L2.

Anschließend bewegen Sie den Cursor auf die Kopfzeile der Liste L3 und geben dort ["] [L1] / [L2] ["] ein.

Die „Gänsefüßchen“ fixieren dabei die Formel. Das heißt, wenn Sie Werte in der Liste L1 oder L2 ändern, dann wird automatisch auch der Formelwert in der Liste L3 neu berechnet.



# Aufgabenbeispiele für den Workshop 2

## Teil 1 – Aufgaben zur linearen Regression

1. Hängt man Gewichte an eine Feder, dann dehnt sich diese Feder aus.
   In einer Messreihe ergaben sich folgende Markierungen an einer Skala:

| Masse (in g) | 45 | 60 | 80 | 105 | 135 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Auslenkung (in cm) | 24,3 | 27,2 | 30,5 | 34,2 | 37,1 | 39,8 |

   a) Bestimmen Sie eine hierfür geeignete Regressionsgerade.
   b) Um wie viel wird sich die Feder weiter ausdehnen, wenn ein Gewicht von 10g dazugefügt wird?
   c) Welchen Skalenwert wird man ablesen können, wenn kein Gewicht an der Feder hängt?

2. Nebenstehende Tabelle zeigt die Weltrekorde im Marathon in den einzelnen Jahren.

| Jahr | Minuten |
|---|---|
| 1971 | 166,5 |
| 1974 | 163,9 |
| 1975 | 158,3 |
| 1977 | 154,8 |
| 1978 | 152,5 |
| 1979 | 147,6 |
| 1980 | 145,7 |
| 1981 | 145,5 |
| 1983 | 142,7 |

   a) Erstellen Sie mithilfe der linearen Regression eine Prognose für das Jahr 2006.
   b) Im Jahr 2005 lag der Weltrekord bei 128,5 Minuten.
      Vergleichen Sie diesen Wert mit Ihrer Prognose aus Teil a) und nehmen Sie hierzu Stellung.
   c) Die Marathonstrecke beträgt 42,195 km.
      Führen Sie in einer neuen Tabelle die Durchschnittsgeschwindigkeiten der einzelnen Weltrekordläufe auf und bestimmen Sie hier mithilfe einer Regressionsgeraden eine Prognose für 2006. Vergleichen Sie auch hier Ihre Prognose mit der Durchschnittsgeschwindigkeit des Weltrekords 2005.
3. Suchen Sie eine Kombination von 4 Messpunkten, die als Regressionsgerade die erste Winkelhalbierende y=x ergeben, ohne dass einer der vier Messpunkte auf dieser Geraden liegt.
4. Der GTR bzw. das CAS bietet neben der Regressionsgeraden noch weitere Regressionsfunktionen.
   a) Wenden Sie die quadratische Regression (QuadReg) auf drei beliebige Messwerte an.
      Zeichnen Sie die Messwerte sowie die entstehende Kurve. Was stellen Sie fest? Wozu eignet sich diese Regression also auch?
   b) Verfahren Sie ebenso mit der kubischen Regression (CubicReg) und mit vier Messwerten.
   c) Wie sieht es mit fünf Messwerten und der quartären Regression (QuartReg) aus?
   d) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die durch die Punkte A(1|2), B(2|1), C(3|1) und D(4|5) geht.

## Teil 2 – Aufgaben für den GTR[2]

5. Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, die durch die angegebenen Punkte verläuft.

   a) A(1|2) B(3|10) C(–2|5) b) A(3|1) B(6|4) C(–1|–3) D(1|–1)

6. Bestimmen Sie eine Gerade, die die Messpunkte am geeignetsten beschreibt:

| x | 2 | 5 | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |

7. Stellen Sie die Folge $(a_n)$ grafisch dar.

   a) $a_n = \sqrt{7n^2 - 5}$ b) $a_1 = 1;\ a_n = 12 + \frac{a_{n-1}}{3}$

8. Bestimmen Sie die Summe der

   a) ersten 50 Quadratzahlen b) ersten 100 Kehrwerte der natürlichen Zahlen

9. Bestimmen Sie die ersten 40 Fibonacci-Zahlen ( $f_1 = 0$ ; $f_2 = 1$ ; $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ )

10. Lösen Sie das Gleichungssystem.

    a) $\begin{pmatrix} 7x+5y=31 \\ 3x-2y=5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4x-5y+3z=11 \\ 8x+3y-z=7 \\ 3x+4y-5z=-7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4x-5y+2z=10 \\ 3x+2y-5z=11 \\ 6x-19y+16z=52 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 4x-5y+2z=10 \\ 3x+2y-5z=11 \\ 6x-19y+16z=22 \end{pmatrix}$

11. Der Querschnitt eines Parabolspiegels kann durch eine Funktion f mit $f(x) = 8\sqrt{x}$ beschrieben werden.

    Parallel zur x-Achse einfallende Strahlen werden dabei so reflektiert, dass die reflektierten Strahlen durch einen gemeinsamen Punkt, den Brennpunkt verlaufen.

    Bestimmen Sie diesen Brennpunkt.

[2] Auszug aus „Analysis Wahlteil“, Stark -Verlag, Nr. 84002