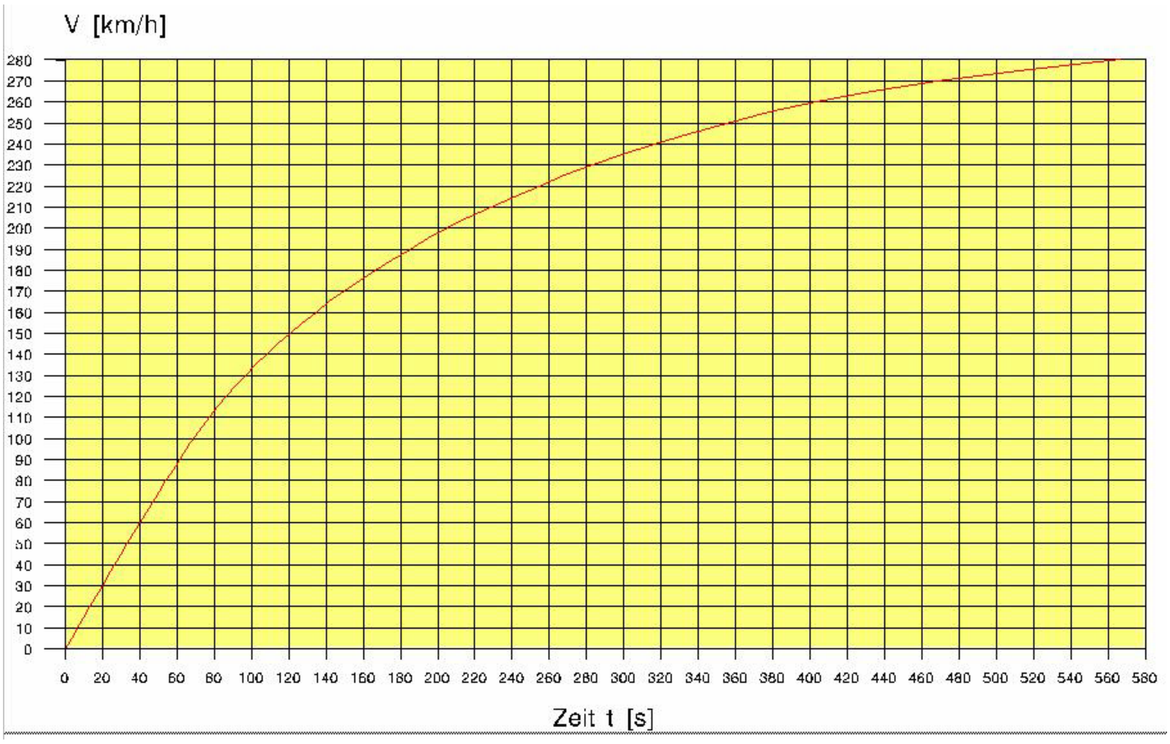
Dieter Brandt: Unterricht mit dem V200 in der Kurstufe
Workshop Unterrichtsbeispiele Tagung Karlsruhe 7. März 2006

Inhalt:

1 Geschwindigkeit eines anfahrenden ICE

Die Messkurve stellt die Geschwindigkeit eines anfahrenden ICE in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.



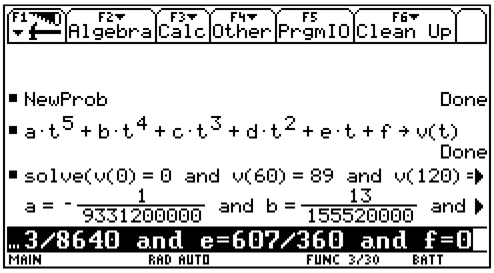
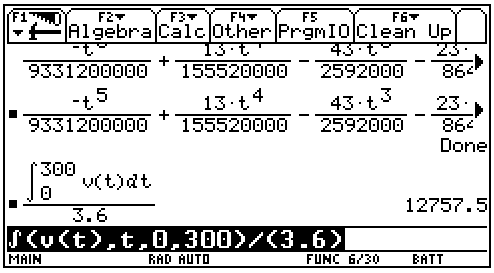
1. Welchen Weg legt der ICE nach dem Anfahren zurück
   a) in der ersten Minute
   b) in den ersten fünf Minuten
   c) in der fünften Minute?
   Beachten Sie $3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. a) Stellen Sie eine Formel auf zur Berechnung des Weges, den ein Fahrzeug mit Geschwindigkeit v(t) zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurücklegt.
   b) Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph mit der Geschwindigkeit v(t) des ICE auf dem obigen Graphen gut übereinstimmt.
   c) Wenden Sie die Formel aus a) an auf die in b) erstellte Funktion.
   Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den in Aufgabe 1 erhaltenen.

Lösungsvorschlag:
Der Einsatz des CAS ermöglicht schnell die Ermittlung der Ergebnisse, z.B. in Gruppen.

1. a) Näherungsweise gilt durchschnittlich v = 45 km/h = 12,5 m/s, also gilt etwa
s = v t = 750 m.
b) Ablesen der mittleren Geschwindigkeiten in 20-Sekunden-Intervallen ergibt die Näherung
$s = \frac{20}{3,6} \cdot (100+122+143+158+170+182+193+202+210+225+231) = 12720$ m.
c) Für die fünfte Minute ergibt sich analogs $= \frac{20}{3,6} \cdot (218+225+231) = 3740$ m.

2a) $s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(x)dx$.
2b/c)
Variante 1: Approximation durch eine <u>Polynomfunktion</u>:
Ansatz $v(t) = a \cdot t^5 + b \cdot t^4 + c \cdot t^3 + d \cdot t^2 + e \cdot t + f$

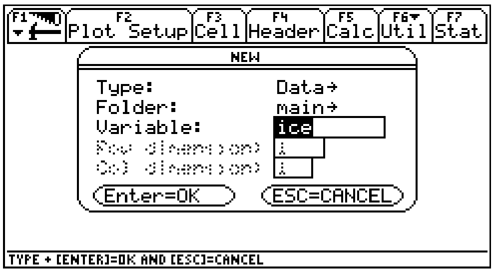
Man verwendet z.B. die abgelesenen Punkte (0|0), (60|89), (120|150), (180|188), (240|214), (300|235) und erhält das Ergebnis auf dem Display.	
Auch die Integration zu Aufgabe 1 ist durchgeführt. Die Division durch 3,6 ist wegen der Umrechnung von km/h auf m/s nötig.	

Variante 2: Approximation durch eine <u>Exponentialfunktion</u>:
Ansatz $v(t) = v_{max} - c \cdot a^t$
Die Messpunkte (0|0), (120|150), (400|259) liefern beispielsweise $v(t) = 281 \cdot (1 - 0,993665^t)$
und damit die Näherungen s(60) = 790 m, s(300) = 12965 m und s(240...300) = 3838 m bei Aufgabe 1.

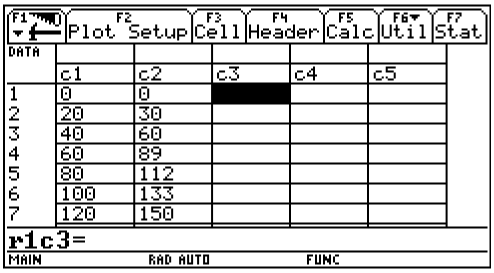
Variante 3: Approximation durch eine <u>gebrochen rationale Funktion</u>:
Ansatz: $v(t) = \frac{v_{max} \cdot t}{t+a}$
Messpunkte wie bei b) liefern $v(t) = \frac{90650t}{241t+43600}$
und damit die Näherungen s(60) = 855 m, s(300) = 12864 m und s(240...300) = 3750 m bei Aufgabe 1.

Variante 4: Eine passende Regression ist ebenfalls möglich. Als Regression bezeichnet man die Anpassung einer Menge von Daten durch den Graph einer passenden Funktion.

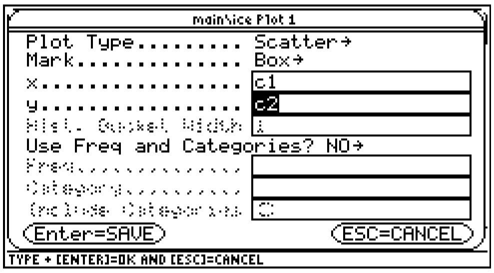
Zunächst werden die Daten eingegeben.
Man wählt dazu
`APPS - Data/Matrix`
und in dem erscheinenden Fenster gibt man new ein und dann einen Variablennamen, z.B. `ice`.
Zweimal mit `Enter` bestätigen.



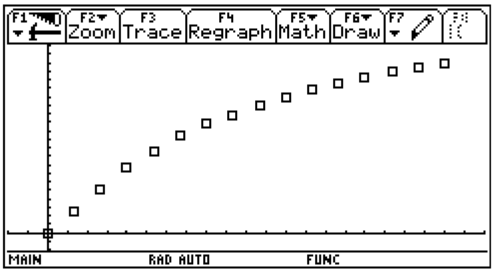
Im erscheinenden Tabellenfenster die Daten eingeben, z.B. in die ersten beiden Spalten c1 und c2; c steht für column.
Spalte c1 kann man übrigens automatisch erzeugen, z.B. bis 300 mithilfe des Befehls
`seq(20k,k,0,15).`
Dazu muss in Spalte c1 zuerst `F4: Header` gewählt werden.



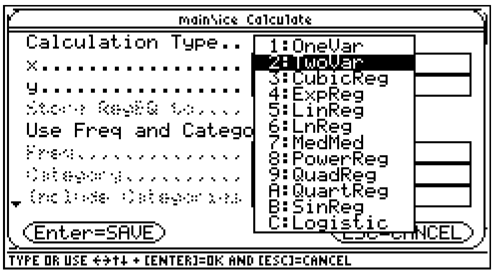
Die Daten werden zunächst grafisch dargestellt.
Dazu wählt man
`F2 - Plot Setup`
und dann
`F1 - Define.`
Die Spalten der Tabelle werden als x bzw. y-Achsenwerte definiert.



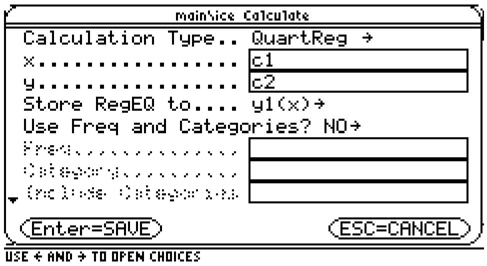
Nun kann man die Daten grafisch darstellen.
Ein passendes Fenster kann man im Graph-Fenster mit
`F2:Zoom - 9:ZoomData`
einrichten.



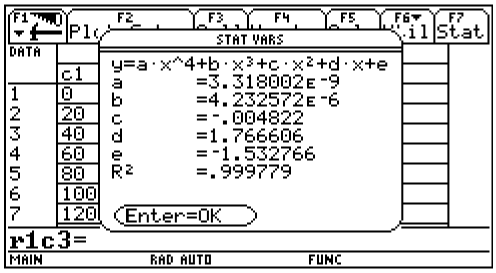
Es soll nun eine passende Regression durchgeführt werden.
Dazu ist eine passende Kurvenform auszuwählen.
Zunächst wird wieder der Data-Editor - Current aufgerufen und dort `F5: Calc` gewählt.
Dort kann man unter Calculation Type eine passende Regression auswählen.



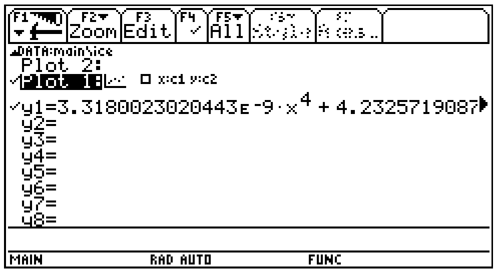
Wir wählen `A:QuartReg`, damit eine passende Kurve vierten Grades bestimmt wird.
Für x, y werden wieder c1, c2 eingegeben.
Außerdem soll die Gleichung der berechneten Funktion in den y= - Editor, z.B. bei y1 eingetragen werden
(bei `Store RegEG to ...` eingeben).



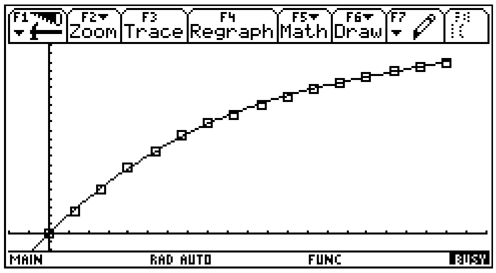
Mit `Enter` wird die Berechnung gestartet und die Gleichung der Funktion ausgegeben. Sie ist außerdem, wie oben eingestellt als y1 gespeichert.



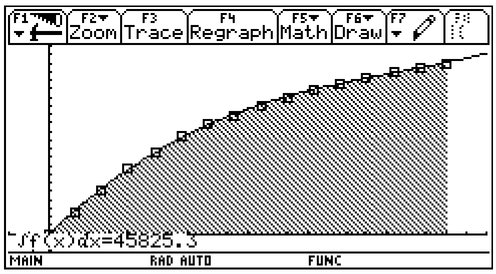
Das sieht man im `Y=-` Editor.
Rollt man dort etwas nach oben, sieht man auch die oben definierte Grafik der Daten als `Plot 1`.



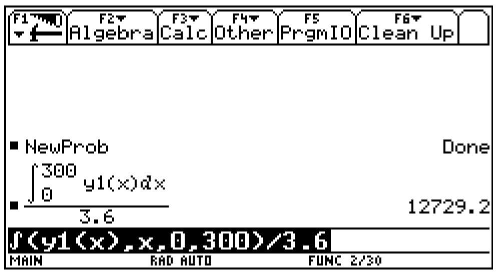
Nun kann die angepasste Kurve im Graph-Fenster angezeigt werden.
Es ist zu beachten, dass die Kurve außerhalb des gewählten Bereiches eine schlechte Approximation an die Daten ist, weil eine ganzrationale Funktion 4.Grades dazu nicht gut geeignet ist.



Mit `F5: Math` kann man dort Berechnungen durchführen, z.B. die (numerische) Berechnung des Integrals von `y1(x)` in den Grenzen von 0 bis 300.

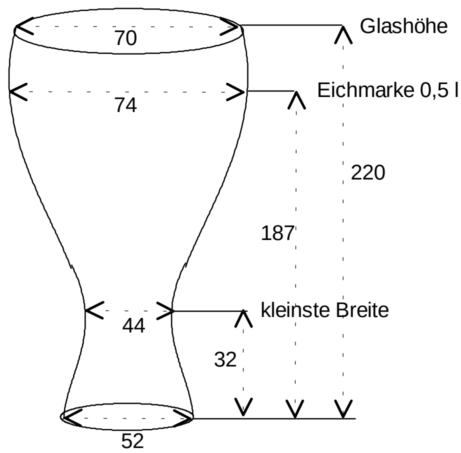


Das geht natürlich auch im Rechenfenster.
Division durch 3.6 ergibt bei dem Beispiel den Weg des ICE (in Metern) 300 sec nach dem Start.



2 Volumenberechnung eines Bierglases

Das Volumen eines Bierglases bis zur Eichmarke soll bestimmt werden und mit der Angabe an der Eichmarke verglichen werden.



Am besten wird für jede Gruppe ein Glas mitgebracht und vermessen. Die Gläser sollten gleich sein.

Mit einem mathematischen Modell soll das Volumen des Gefäßes ermittelt werden.
Die in den Gruppen erzielten Ergebnisse werden der Klasse präsentiert und diskutiert.

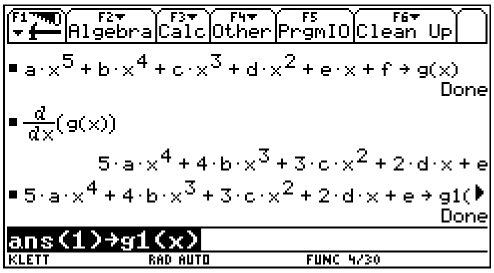
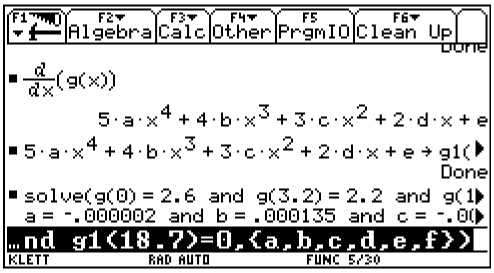
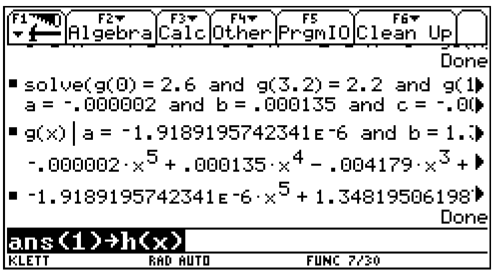
Falls keine Gläser vorhanden sind, kann man die (Innen-) Maße (in mm) aus der nicht maßstäblichen Skizze verwenden.

Lösungsvorschlag:

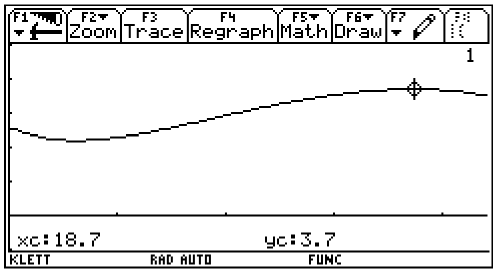
Schritt 1:
Das Glas wird um 90 Grad in die Horizontale gedreht. Es wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen Ursprung der Mittelpunkt des Glasbodens ist. Die x-Achse ist die Symmetrieachse des Glases, die y-Achse verläuft entlang eines Radius am Glasboden.
Die Randkurve wird modelliert mit einer ganz rationalen Funktion 5. Grades
Ansatz $g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

Bedingungen:

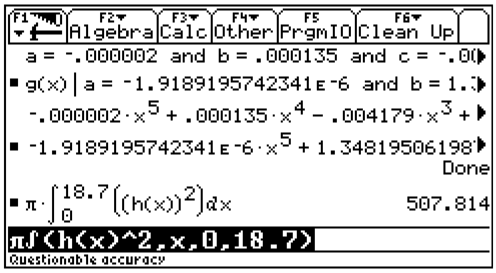
1. g(0) = 2,6
2. g(3,2) = 2,2
3. g(18,7) = 3,7
4. g(22) = 3,5
5. g'(3,2) = 0
6. g'(18,7) = 0

Man gibt den Ansatz ein und bestimmt auch die benötigte erste Ableitung g1(x) von g(x).	
Mit dem solve-Befehl werden die Bedingungen eingegeben, und die Parameter werden bestimmt.	
Die Parameter werden eingesetzt, indem man sie nach der Eingabe von g(x)| in die Befehlszeile kopiert. Das Ergebnis wird als neue Funktion h(x) abgespeichert.	

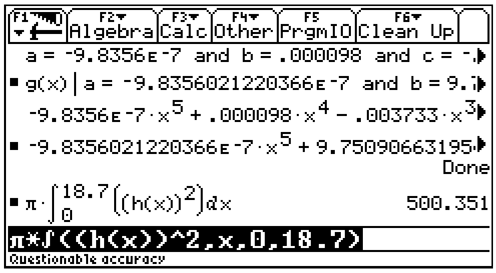
Der Graph der so erstellten Randfunktion wird zur Kontrolle im Graph-Fenster dargestellt.



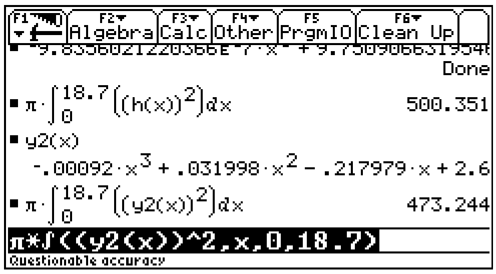
Schritt 2:
Mit der bestimmten Funktion wird das Volumen berechnet.
Das Ergebnis, etwa 508 cm^3, stimmt recht gut mit dem Wert an der Eichmarke überein.



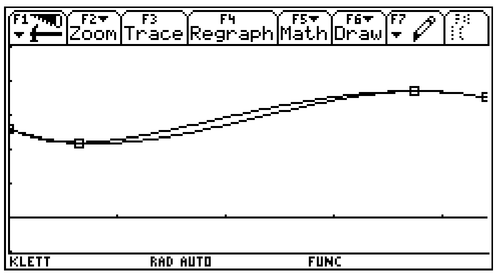
Eine leichte Änderung bringt ein noch besseres Ergebnis. Wenn man nur die Bedingung g(18,7) = 3,7 ändert zu g(18,7) = 3,6, so erhält man ziemlich genau 500 cm^3. Das zeigt, wie kleine Messfehler das Ergebnis beeinflussen können.



Zum Vergleich wurde noch eine Kurve dritten Grades nur mit den ersten vier Bedingungen erstellt. Das Ergebnis ist deutlich schlechter.



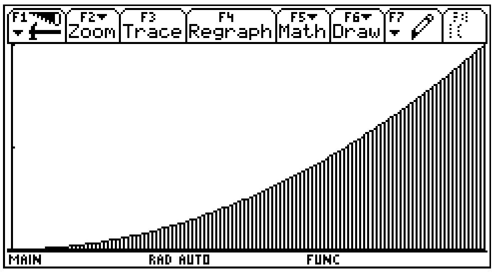
Zum Vergleich noch die beiden Randkurven, die deutlich voneinander abweichen (zu y2 gehört die im mittleren Bereich unten verlaufende Kurve).



3 Der Weg zum Hauptsatz

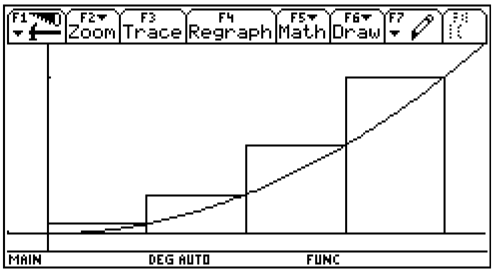
<u>Das Flächenproblem</u>:
Wie kann man bei einer Figur mit krummlinigem Rand den Flächeninhalt berechnen?

Als Beispiel wird die Fläche "unter" einer Normalparabel (Gleichung $f(x) = x^2$) gewählt, wie sie in der Abbildung dargestellt ist. Sie wird links von der y-Achse, unten von der x-Achse und rechts von der Geraden x = 1 begrenzt.

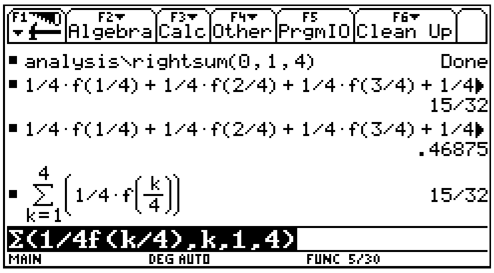


Grundidee: Die Fläche wird angenähert durch einfach zu berechnende Flächen.
Der folgende Weg kann interaktiv mit dem Rechner durchgeführt werden. Es gibt zahlreiche Variationsmöglichkeiten, auf einige wird hingewiesen.

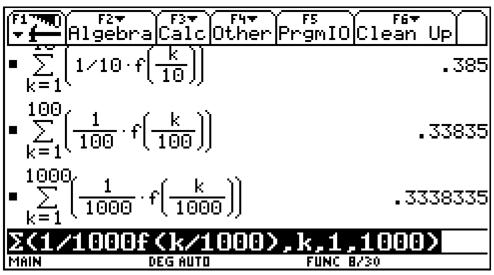
Das Intervall wird zunächst in vier Teilintervalle aufgeteilt und dann Rechtecke der Breite 1/4 wie in der Abbildung eingezeichnet
(Programm dazu siehe Anhang und auf der CD).



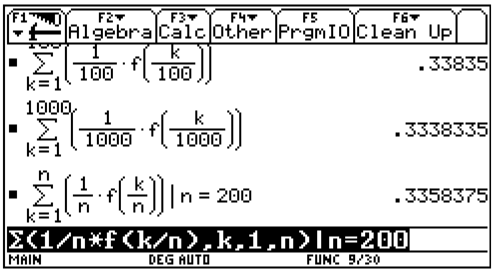
Mit der Summenfunktion kann diese Summe kürzer eingegeben werden:
Σ(1/4f(k/4),k,1,4)



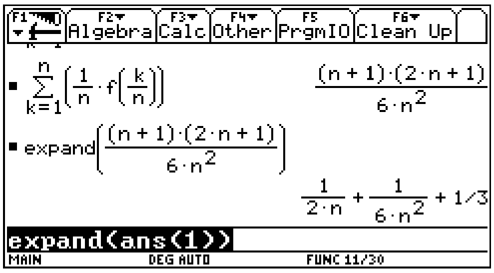
Verallgemeinerung:
Es werden mehr Teilintervalle verwendet, z.B. 10, 100, 1000.
Es kann eine Vermutung über den gesuchten Flächeninhalt angestellt werden, weil die Näherung schon recht gut ist.



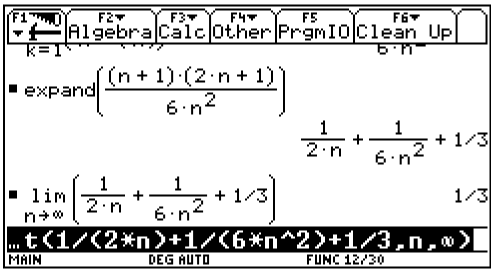
Die Abbildung zeigt eine Variante für die Eingabe, die Änderungen vereinfacht. Dazu wird die Zahl n der Teilintervalle als Parameter eingesetzt, der mit der "wobei"-Funkion | ersetzt wird.



Wenn man die Ersetzung weglässt, berechnet der Rechner sogar eine Termdarstellung der Summe in Abhängigkeit von n.
Man erkennt, dass der für n → ∞ den Grenzwert $\frac{1}{3}$ hat.

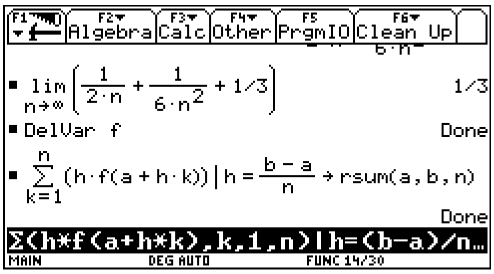


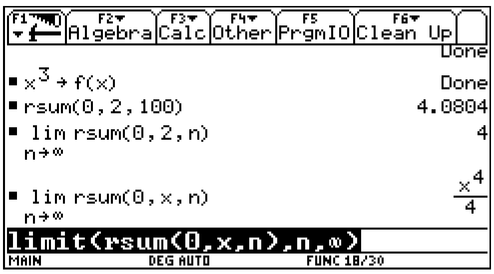
Das ergibt sich auch mit der limit-Funktion des Rechners.



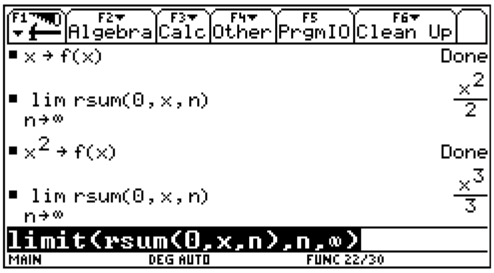
Nun gibt es zahlreiche Variationen:
a) Man kann mit einer anderen Approximation arbeiten, z.B. mit Trapezen zur Annäherung der Fläche.
b) Man kann andere Funktionen untersuchen.
c) Man kann andere Bereiche als 0..1 untersuchen.

Variante c) kann z.B. auf folgende Verallgemeinerung für die obige Summe führen (DelVar f sorgt dafür, dass die Formel auch für andere Funktionen als $f(x) = x^2$ einsetzbar ist):
Es wird eine Funktion rsum definiert, die von a und b (den Intervallgrenzen) sowie von der Zahl n der Teilintervalle abhängt.
Damit ergeben sich z.B. für $f(x) = x^3$ für
a=0, b=2, n=100
a=0, b=2, n → ∞
a=0, b=x, n → ∞
die abgebildeten Rechnerausgaben.





Variation des letzten Falles mit verschiedenen Potenzfunktionen ergibt die folgenden Abbildungen.



Das führt auf die Vermutung, dass ein einfacher Zusammenhang zwischen der Randfunktion $f(x)=x^n$ und dem Flächeninhalt $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für das Intervall [0,x] besteht.

Das ist im wesentlichen die Vermutung des Hauptsatzes, den man nun wie üblich beweisen kann.